

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0005.005

# 新四维多卷超混沌 Jerk 系统的复杂动力学研究\*

韩 杰, 杨启贵\*\*

(华南理工大学 数学学院, 广州 510640)

**摘 要:**针对仅有一个平衡点的非线性超混沌系统能否产生多卷吸引子这一问题,提出了仅包含一个非线性项且具有唯一平衡点的新四维多卷超混沌光滑系统;基于 Sprott 构造的三维 Jerk 混沌系统,结合反馈控制技术以及多卷混沌系统的设计方法,利用 Routh-Hurwitz 判别准则、中心流形定理以及数学仿真软件,对新系统的复杂动力学性质进行了深入地理论分析和探讨;研究发现系统存在唯一的平衡点,且给出此平衡点在不同状态下的参数适用范围,严格证明了新系统存在 Hopf 分岔现象,进一步数值模拟获得新系统的 Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映射等特征,验证了新系统仅有一个鞍-焦点且能够产生多卷超混沌吸引子、周期吸引子等复杂的动力学行为,丰富了现有 Jerk 系统的超混沌复杂性研究。

**关键词:**超混沌系统;多卷系统;Jerk 系统;Lyapunov 指数;Hopf 分岔

中图分类号:O127

文献标志码:A

文章编号:1672-058X(2021)05-0029-08

## 0 引 言

20 世纪 60 年代, Lorenz 发现一个能够产生蝶形混沌吸引子的三维常微分动力系统,此系统呈现复杂的非线性动力学,引起学术界的广泛研究和深入讨论,由此混沌研究及应用得到蓬勃发展。混沌作为非线性动力学领域的重要分支,相关理论及其应用已渗入到许多其他学科领域。早在 1994 年, Sprott<sup>[1]</sup>首次利用计算机穷举法获得一类三维自治 Jerk 混沌系统,系统形式简单,却具备良好的动力学特性,在物理学界很快就受到了学者们的热烈关注。

近年来,随着非线性动力学的深入发展,人们注意到 Jerk 混沌系统不仅能够产生多种类型的吸引子,如多重吸引子<sup>[2]</sup>、隐藏吸引子<sup>[3]</sup>、共存吸引子<sup>[4]</sup>等,而且在现实生活中有极好的应用前景,涉及图像

加密、网络通信等核心技术。因此,对 Jerk 系统的研究极为重要。在三维的 Jerk 混沌研究中, Li 等<sup>[5]</sup>提出具有唯一平衡点的三维 Jerk 混沌系统,并借助仿真软件加以验证系统的动力学特性; Sang 和 Huang<sup>[6]</sup>找到具有两个平衡点的三维二次型 Jerk 混沌系统并研究其 0-Hopf 分岔。但实际上,研究人员发现高维或多卷的超混沌系统相较于混沌系统具有更复杂的动力学行为,能更好地适应复杂的实际情景,从而可广泛应用于信息加密等领域。而产生超混沌的系统维数至少是四维,因此对四维超混沌 Jerk 系统的探讨具有重要价值。目前,探讨 Jerk 系统如何由三维拓展至四维是很有意义的。在四维的研究中, Vaidyanathan<sup>[7]</sup>利用 3 个二次项构造了一类无平衡点的非线性四维超混沌 Jerk 系统; Dalkiran 和 Sprott<sup>[8]</sup>采用指数函数作为非线性项,得到一个平衡点的四维 Jerk 系统,这些研究丰富了四维

收稿日期:2021-01-07;修回日期:2021-03-15.

\* 基金项目:国家自然科学基金资助(12071151).

作者简介:韩杰(1997—),女,贵州关岭人,硕士研究生,从事混沌动力学研究.

\*\* 通讯作者:杨启贵(1965—),男,重庆市人,教授,博士,从事混沌动力学研究. Email:qgyang@scut.edu.cn.

Jerk 系统的类型。最近,关于四维非光滑 Jerk 系统的研究也有一些成果。如 Hosham<sup>[9]</sup> 提出具有 4 个平衡点的分片四维 Jerk 系统,并分析系统复杂的分岔现象。此外也有学者通过引入控制忆阻器来构造能产生多卷吸引子的系统,基于此方法, Wang 等<sup>[10]</sup> 得到了具有 8 个平衡点的四维超混沌多卷 Jerk 系统; Xia 等<sup>[2]</sup> 获得具有 21 个平衡点且能产生多卷的超混沌 Jerk 系统; 随后 Zhang 和 Wang<sup>[11]</sup> 构造出具有无穷多个平衡点的超混沌四维多卷 Jerk 系统,他们构造的多卷吸引子相比单卷和双卷的吸引子展现出了更为复杂的结构。迄今为止,还没有一个普适方法可用来构造多卷系统,如何找到一个能产生多卷的非线性系统是个难点。研究发现能产生多卷的超混沌 Jerk 系统往往具有多个平衡点且不光滑,那么仅有一个平衡点的光滑 Jerk 超混沌系统能否产生多卷吸引子是个值得探讨且有意思的问题,但目前关于这方面的综合研究还比较少,因此对这类系统的研究极具意义和价值。

针对上述问题,提出了具有唯一平衡点的新四维多卷光滑超混沌 Jerk 系统,系统仅含有一个非线性项。首先,给出系统的具体形式,通过分析系统的对称性及耗散性、Lyapunov 指数和吸引子相图来讨论系统的基本性质。然后从系统局部特征角度出发,分析系统蕴含的复杂动力学行为,包括对平衡点和 Hopf 分岔的相关分析,严格证明了两者的存在性。最后通过数值模拟有效刻画了系统的 Lyapunov 指数谱、分岔图、相图以及 Poincaré 映射,展示了新系统的复杂动力学特征。

### 1 新四维多卷超混沌 Jerk 系统

2000 年 Sprott<sup>[12]</sup> 提出了一个三维 Jerk 混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - \alpha x_3 + G(x_1) \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $\dot{x}_1$  表示速度,  $\dot{x}_2$  表示加速度,  $\dot{x}_3$  表示加速度的变化率,非线性函数  $G(x_1) = g[x_1 - \text{sgn}(x_1)]$ , 控制参数  $(\alpha, g) \in \mathbf{R}_+^2$ 。

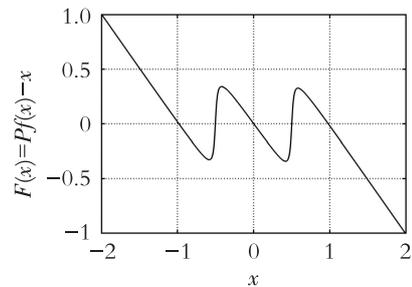
基于系统式(1),利用反正切函数来逼近符号函数,结合多卷混沌系统的设计方法<sup>[13]</sup>,设计反馈控制器,引入线性反馈控制项  $-au$  及非线性控制项

$F(x)$ , 可获得如下新四维连续多卷超混沌 Jerk 系统:

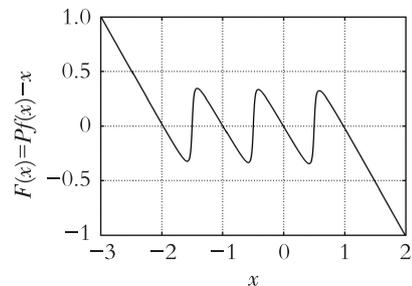
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z - au \\ \dot{z} = -y - bz + F(x) \\ \dot{u} = k_1 x + k_2 y \end{cases} \quad (2)$$

其中:参数  $(a, b, k_1, k_2) \in \mathbf{R}_+^4$ , 函数  $F(x) = Pf(x) - x$ , 函数  $f(x)$  如式(3)所示,其中参数  $P = 0.5$ , 常数  $Q \neq 0$ , 控制参数  $N, M \in \mathbf{N}_+^2$ 。在函数  $f(x)$  中选取常数  $Q = 45$ , 调节控制参数  $N$  和  $M$  的取值, 绘制函数  $F(x)$  的图像如图 1 所示。

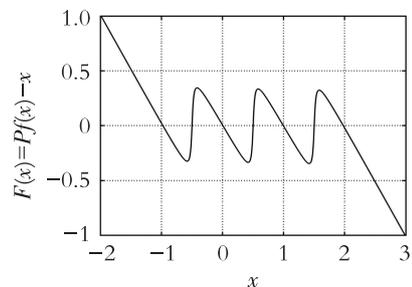
$$f(x) = N - M + \frac{2}{\pi} \left\{ \sum_{n=1}^N \arctan[Q(x - n + P)] + \sum_{m=1}^M \arctan[Q(x + m - P)] \right\} \quad (3)$$



(a)  $N=M=1$



(b)  $N=1, M=2$



(c)  $N=2, M=1$

图 1 函数  $F(x)$  的图像

Fig. 1 Plots of the function  $F(x)$

固定系统式(2)的参数,对其进行坐标变换:

$$(x, y, z, u) \rightarrow (-x, -y, -z, -u)$$

系统的形式保持不变,因而系统式(2)关于原点(0,0,0)对称。

系统式(2)的散度为

$$\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = -b$$

当  $b > 0$ , 即  $\nabla V < 0$  时, 系统式(2)是耗散的。这意味着系统式(2)在无穷远处会以指数速率  $-b$  收敛到 0。

当系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$  时, 利用 Matlab 数值模拟, 计算得到系统式(2)的 Lyapunov 指数:

$$LE_1 = 0.106\ 9, \quad LE_2 = 0.107\ 4$$

$$LE_3 = 0.000\ 0, \quad LE_4 = -0.844\ 4$$

由此可知系统式(2)在该参数条件下是超混沌

的。根据混沌系统 Lyapunov 维数的定义, 计算得出系统式(2)的 Lyapunov 维数  $D_L \approx 3.253\ 7$ , 此时系统式(2)对应的相图如图 2 所示, 可以看出系统产生了 3 卷超混沌吸引子。

其次固定系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2, Q) = (0.01, 0.68, 0.01, 1, 9\ 999)$ , 同理可得到相对应的 Lyapunov 指数:

$$LE_1 = 0.090\ 9, \quad LE_2 = 0.091\ 2$$

$$LE_3 = 0.000\ 0, \quad LE_4 = -0.862\ 2$$

以及 Lyapunov 维数  $D_L \approx 3.211\ 2$ 。通过调节函数  $f(x)$  中的控制参数  $N$  和  $M$ , 发现系统式(2)可以产生具有不同卷数的超混沌吸引子, 其对应二维平面的相图如图 3 所示。

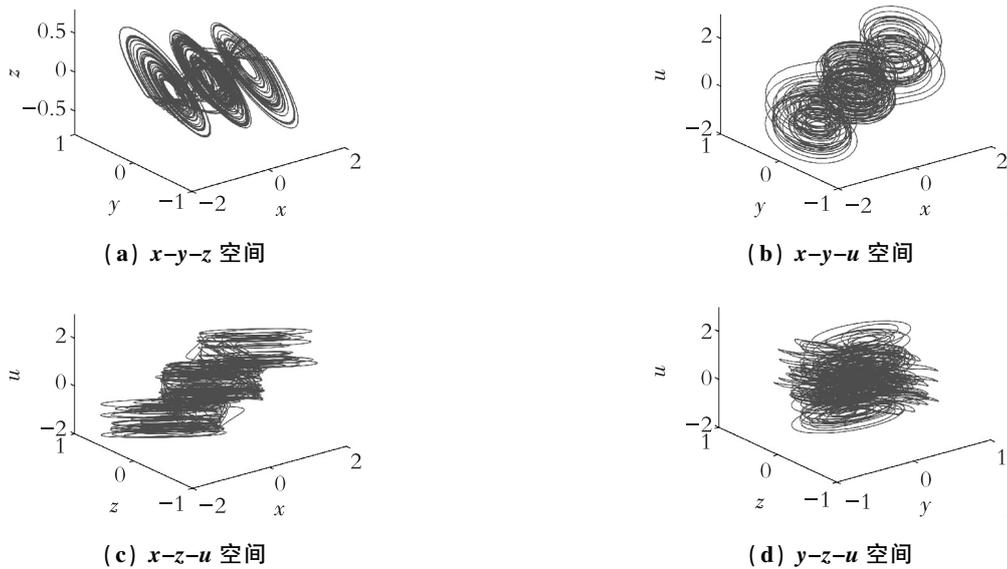
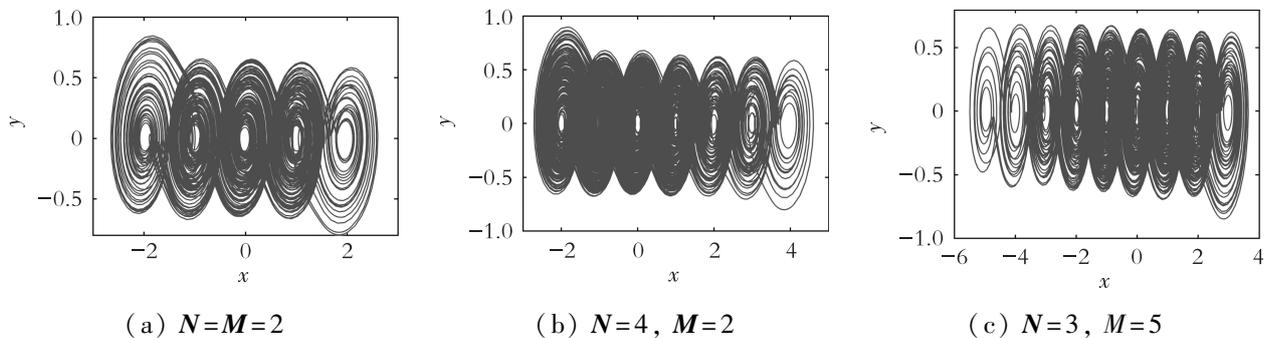


图 2 系统式(2)在参数  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$  时三维空间的相图

Fig. 2 Phase portraits of system (2) in 3D spaces with  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$



(a)  $N=M=2$

(b)  $N=4, M=2$

(c)  $N=3, M=5$

图 3 系统式(2)在参数  $(a, b, k_1, k_2, Q) = (0.01, 0.68, 0.01, 1, 9\ 999)$  时  $x-y$  平面的相图

Fig. 3 Phase portraits of system (2) on  $x-y$  plane with  $(a, b, k_1, k_2, Q) = (0.01, 0.68, 0.01, 1, 9\ 999)$

## 2 局部动力学分析

### 2.1 平衡点存在性和稳定性

系统的局部动力学特征可通过平衡点的性质反映出来,现主要研究的是系统式(2)平衡点的存在性及稳定性,探究平衡点处于不同状态时的参数范围。

系统式(2)的平衡点可由方程组式(4)确定:

$$\begin{cases} y=0 \\ z-au=0 \\ -y-bz+F(x)=0 \\ k_1x+k_2y=0 \end{cases} \quad (4)$$

求解方程组式(4)得到系统式(2)的平衡点  $E(x, y, z, u) = \left(0, 0, \frac{F(x)}{b}, \frac{F(x)}{ab}\right) = (0, 0, 0, 0)$ 。进一步可得:对任意的  $N$  和  $M$ , 系统式(2)在参数  $(a, b, k_1, k_2) = (0.01, 0.63, 0.01, 1)$  时平衡点  $E$  对应的 4 个特征值分别为两个负实数特征值和一对实部为正的共轭复根,即:

$$\lambda_1 = -0.0001, \lambda_2 = -0.8447$$

$$\lambda_{3,4} = 0.1074 \pm 1.0862i$$

此时系统式(2)在平衡点  $E$  处的流形具有两个稳定方向和两个不稳定方向,因此平衡点  $E$  是一个鞍-焦点。

**定理 1** 设

$$\Omega = \{ (a, b, k_1, k_2) \mid ak_1 > 0, b > ak_1 + 1, \}$$

$$(b - ak_1 - 1)(abk_2 + ak_1 + 1) > ab^3k_1 \}$$

则系统式(2)的平衡点  $E$  满足如下结论:

当系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2) \in \Omega$  时,其平衡点  $E$  是渐进稳定的;当系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2) \notin \Omega$  时,其双曲平衡点  $E$  是不稳定的。

**证明** 系统式(2)在平衡点  $E$  附近的 Jacobi 矩阵为

$$J_E = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ F'(0) & -1 & -b & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ -1 & -1 & -b & 0 \\ k_1 & k_2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

通过求解  $|\lambda E - J_E| = 0$ , 得到上述 Jacobi 矩阵的特征方程如式(5)所示, 其中参数  $(a, b, k_1, k_2) \in \mathbf{R}_+^4$ 。

$$\lambda^4 + b\lambda^3 + (ak_2 + 1)\lambda^2 + (abk_2 + ak_1 + 1)\lambda + abk_1 = 0 \quad (5)$$

计算如下行列式:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= b \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} b & 1 \\ abk_2 + ak_1 + 1 & ak_2 + 1 \end{vmatrix} = b - ak_1 - 1 \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} b & 1 & 0 \\ abk_2 + ak_1 + 1 & ak_2 + 1 & b \\ 0 & abk_1 & abk_2 + ak_1 + 1 \end{vmatrix} = \\ & (b - ak_1 - 1)(abk_2 + ak_1 + 1) - ab^3k_1 \\ \Delta_4 &= \begin{vmatrix} b & 1 & 0 & 0 \\ abk_2 + ak_1 + 1 & ak_2 + 1 & b & 1 \\ 0 & abk_1 & abk_2 + ak_1 + 1 & ak_2 + 1 \\ 0 & 0 & 0 & abk_1 \end{vmatrix} = \end{aligned}$$

$$abk_1\Delta_3$$

于是当系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2) \in \Omega$  时, 有  $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0, \Delta_4 > 0$ , 根据 Routh-Hurwitz 判别准则可得, 系统式(2)的平衡点  $E$  是渐进稳定的; 当参数  $(a, b, k_1, k_2) \notin \Omega$ , 系统式(2)的双曲平衡点  $E$  是不稳定的。

### 2.2 Hopf 分岔存在性

Hopf 分岔是混沌动力学中一种重要的分岔类型, 现研究系统式(2)在平衡点  $E(0, 0, 0, 0)$  附近的 Hopf 分岔。

**定理 2** 设系统式(2)的参数  $(a, k_1, k_2) \in \mathbf{R}_+^3$ , 且

$$A = a^2k_2^2 + ak_2 + 1$$

$$B = -ak_2(ak_2 + 1)(2ak_2 + 1) - 9ak_1(ak_1 + 1)$$

$$C = a^2k_2^2(ak_2 + 1)^2 + 3ak_1(ak_1 + 1)(2ak_2 + 1)$$

$$\Delta = B^2 - 4AC$$

则当系统式(2)的参数  $b$  经过其临界值  $b_j$  时, 系统会发生 Hopf 分岔, 其中

$$b_j = \frac{ak_1 + 1}{\omega_j^2 - ak_2}, \quad j = 1, 2, 3$$

$$\omega_1^2 = 2ak_2 + 1 + \frac{B}{A}, \quad \omega_{2,3}^2 = -\frac{B}{2A}$$

**证明** 假设系统式(2)的特征方程式(5)存在

一对纯虚根  $\lambda = \pm i\omega (\omega \in \mathbf{R}_+)$ , 将纯虚根  $i\omega$  代入特征方程式(5)可得:

$$\omega^4 - (ak_2 + 1)\omega^2 + abk_1 + i\omega(abk_2 + ak_1 + 1 - b\omega^2) = 0 \quad (6)$$

由式(6)推出方程组:

$$\begin{cases} \omega^4 - (ak_2 + 1)\omega^2 + abk_1 = 0 \\ abk_2 + ak_1 + 1 - b\omega^2 = 0 \end{cases}$$

通过求解方程组有:

$$\begin{cases} b = \frac{ak_1 + 1}{\omega^2 - ak_2} \\ \omega^6 - (2ak_2 + 1)\omega^4 + ak_2(ak_2 + 1)\omega^2 + ak_1(ak_1 + 1) = 0 \end{cases}$$

利用盛金公式<sup>[14]</sup>可解得,当  $\Delta = 0$  时,有:

$$\begin{cases} b = b_j = \frac{ak_1 + 1}{\omega_j^2 - ak_2}, j = 1, 2, 3 \\ \omega_1^2 = 2ak_2 + 1 + \frac{B}{A}, \omega_{2,3}^2 = -\frac{B}{2A} \end{cases}$$

$$Re \frac{\partial \lambda(b)}{\partial b} \Big|_{b=b_j, \lambda=\pm i\omega_j} = \frac{2(ak_2 + 1)\omega_j^4 - [2ak_2(ak_2 + 1) + 3ab_jk_1]\omega_j^2 + a^2b_jk_1k_2 - 3ak_1(ak_1 + 1)}{(ab_jk_2 + ak_1 + 1 - 3b_j\omega_j^2)^2 + 4\omega_j^2(ak_2 + 1 - 2\omega_j^2)^2} \neq 0$$

因此,系统式(2)满足中心流形定理中 Hopf 分岔存在的第二条件<sup>[15]</sup>。由 Hopf 分岔存在性定理得证,当系统式(2)的参数  $b$  越过其临界值  $b_j$  时,系统发生了 Hopf 分岔。

为了验证定理 2 的合理性,利用数学软件对系统式(2)进行数值仿真验证,选取系统式(2)的参数  $(a, k_1, k_2) = (0.01, 0.01, 1)$ , 通过计算可得  $b_1 = 1.00, b_{2,3} = 161.08$ 。现验证  $b_1 = 1.00$  的情形,选取函数  $f(x)$  的参数  $Q = 9\ 999, N = M = 1$ , 当系统式(2)的参数  $b = 0.99 < b_1$  时,平衡点  $E$  对应的 4 个特征值分别为两个负实数特征值和一对实部为正的共轭复根,即:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.000\ 1, \lambda_2 = -0.995\ 0 \\ \lambda_{3,4} &= 0.002\ 5 \pm 1.007\ 5i \end{aligned}$$

此时系统式(2)在平衡点  $E$  处具有两个稳定流形和两个不稳定流形,平衡点  $E$  是一个鞍-焦点,系统式(2)的吸引子相图如图 4(a)所示,此时系统生成了一个多卷吸引子;当系统式(2)的参数  $b = 1.01 > b_1$  时,平衡点  $E$  对应的 4 个特征值如下所示:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0.000\ 1, \lambda_2 = -1.005\ 1 \\ \lambda_{3,4} &= -0.002\ 4 \pm 1.002\ 5i \end{aligned}$$

把  $\omega^2 = \omega_j^2, b = b_j$  代入特征方程式(5)得:

$$(\lambda^2 + \omega_j^2) \left( \lambda^2 + b_j\lambda + \frac{ab_jk_1}{\omega_j^2} \right) = 0$$

由此可解得:

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_j, \lambda_{3,4} = \frac{-b_j \pm \sqrt{b_j^2 - 4 \frac{ab_jk_1}{\omega_j^2}}}{2}$$

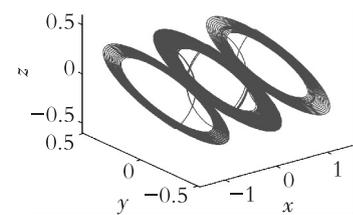
因此,当  $\omega^2 = \omega_j^2, b = b_j$  成立时,系统式(2)对应的特征方程有一对共轭纯虚根,由中心流形定理可知,系统式(2)满足 Hopf 分岔存在的第一条件<sup>[15]</sup>。

再根据特征方程式(5)可得:

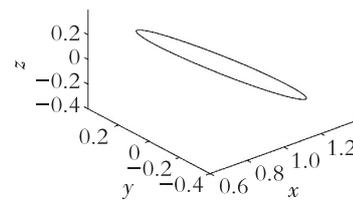
$$\frac{\partial \lambda(b)}{\partial b} \Big|_{b=b_j, \lambda=\pm i\omega_j} = \frac{ak_1 + i\omega_j(ak_2 - \omega_j^2)}{ab_jk_2 + ak_1 + 1 - 3b_j\omega_j^2 + 2i\omega_j(ak_2 + 1 - 2\omega_j^2)}$$

那么有:

特征值所有实部均为负数,此时系统式(2)的平衡点  $E$  是稳定的,图 4(b)展示了系统的吸引子相图,由此看出系统存在周期轨。因此,系统式(2)的参数  $b$  穿过  $b = 1.00$  时,平衡点的状态由不稳定变为稳定,系统发生了 Hopf 分岔,因此验证了定理 2 的结论。



(a)  $b = 0.99$



(b)  $b = 1.01$

图 4 系统式(2)在参数  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$  时  $x-y-z$  空间的相图  
Fig. 4 Phase portraits of system (2) in  $x-y-z$  space with  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$

### 3 复杂动力学分析

固定系统式(2)的参数  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) =$

$(0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$ , 选定参数  $b$  在区间  $[0.6, 1.1]$  变化时, 系统的 Lyapunov 指数谱和分岔相图如图 5 所示。

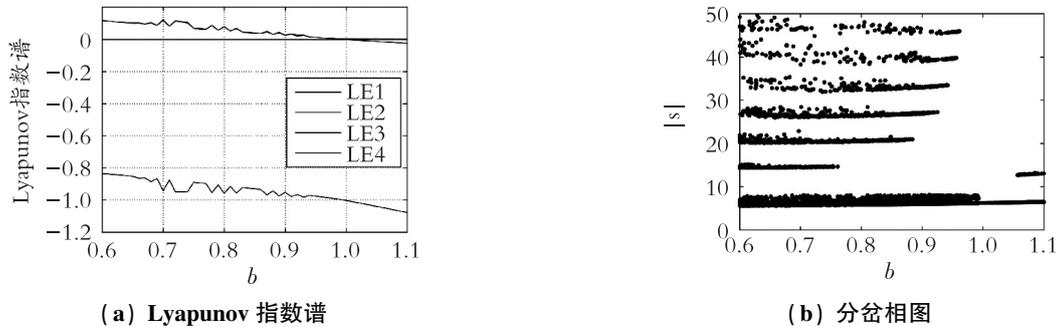


图 5 参数  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$ ,  $b \in [0.6, 1.1]$  时, 系统式(2)对应的 Lyapunov 指数谱图和分岔相图

Fig. 5 Lyapunov exponents and the bifurcation diagrams of system(2) when  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$  and  $b \in [0.6, 1.1]$

结合图 5(a)-5(b)可以看出: 随着参数  $b$  的增加, 系统式(2)的动力学状态经历了从超混沌到拟周期的过程。特别地, 当参数  $b$  选取特定值时, 系统式(2)对应的 4 个 Lyapunov 指数如表 1 所示, 对应

的吸引子相图如图 6 所示。从表 1 可以看出: 系统式(2)的动力学经历了从超混沌到混沌、拟周期到周期这 4 个状态的变化, 从图 6 可以看出系统式(2)具有复杂的动力学特征。

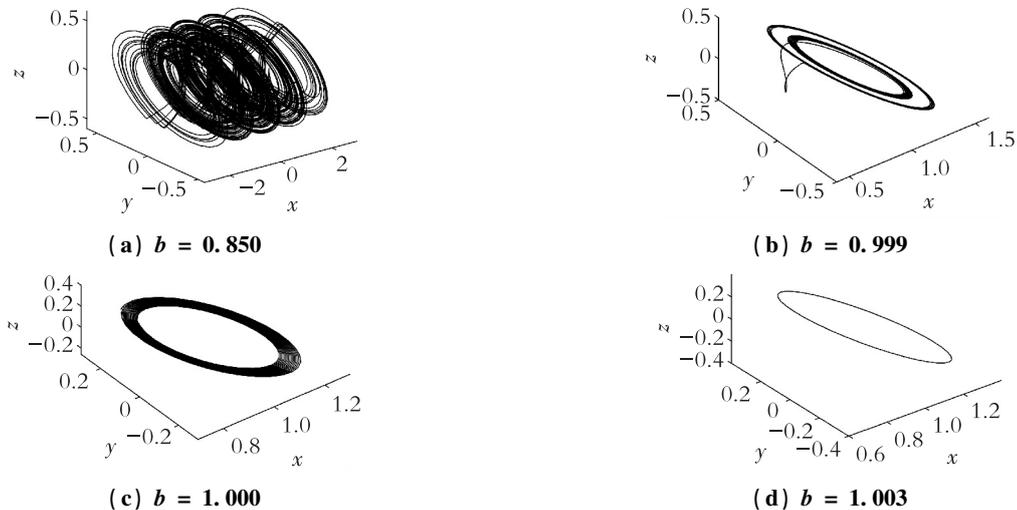


图 6 系统式(2)在参数  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$  时  $x-y-z$  空间的相图  
Fig. 6 Phase portraits of system(2) in  $x-y-z$  space with  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$

表 1 系统式(2)在参数  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$  时的 Lyapunov 指数  
Table 1 Lyapunov exponents of system(2) with  $(a, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.01, 1, 9\ 999, 3, 2)$

$b$	$LE_1$	$LE_2$	$LE_3$	$LE_4$	动力学行为
0.850	0.040 2	0.039 6	0.000 0	- 0.929 7	超混沌
0.999	0.000 2	0.000 0	- 0.000 1	- 0.999 1	混沌
1.000	0.000 0	0.000 0	- 0.000 3	- 0.999 6	拟周期
1.003	0.000 0	- 0.000 6	- 0.001 3	- 1.001 1	周期

选取系统式(2)的参数  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$  时,系统的吸引子

在二维平面的 Poincaré 映射如图 7 所示,表明系统式(2)存在超混沌吸引子。

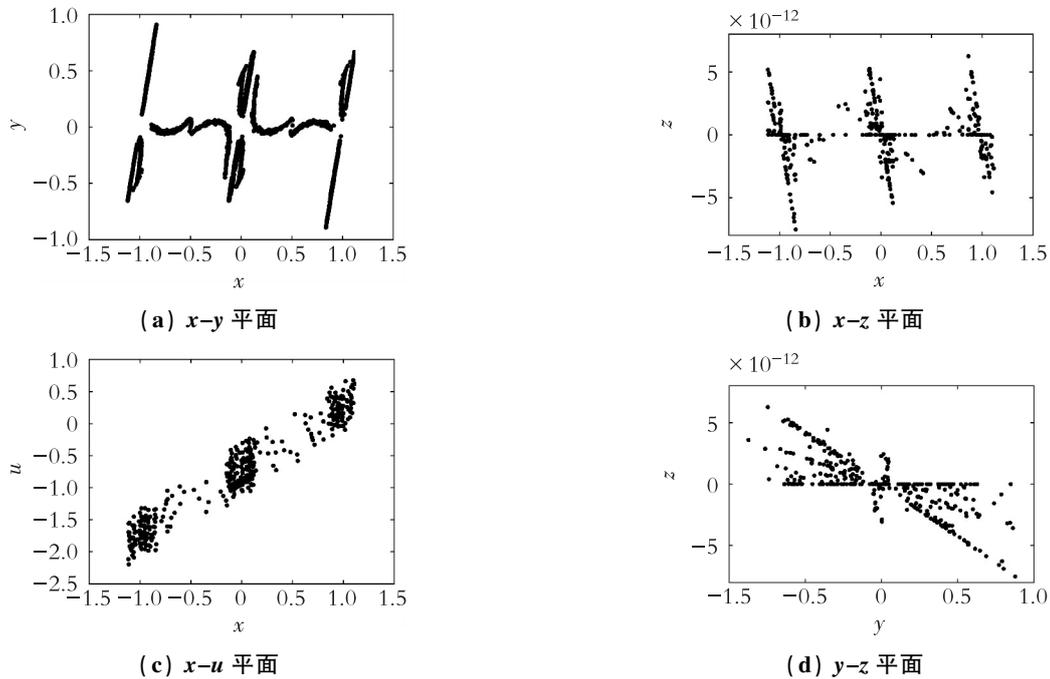


图 7 系统式(2)在参数  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$  时二维平面的 Poincaré 映射图

Fig. 7 Poincaré mappings of system (2) on 2D planes with  $(a, b, k_1, k_2, Q, N, M) = (0.01, 0.63, 0.01, 1, 9\ 999, 1, 1)$

## 4 总 结

立足于 Jerk 混沌系统的吸引子及平衡点两个视角,通过反馈控制器技术,建立四维多卷超混沌光滑 Jerk 系统。详细分析了所得系统的基本性质,包括平衡点的存在性及处于稳定状态时的参数条件、Hopf 分岔存在性等,发现系统是耗散的且关于原点对称,系统仅有一个平衡点,为鞍-焦点类型,且存在 Hopf 分岔现象。进一步利用数学软件 Matlab 进行数值仿真得到系统的 Lyapunov 指数谱、吸引子相图和 Poincaré 映射等特征,验证了提出的新系统具有周期、混沌、拟周期、超混沌吸引子的复杂动力学现象。研究不仅丰富了多卷 Jerk 系统的类型,而且对进一步深入理解四维多卷超混沌光滑 Jerk 系统的动力学具有重要的理论意义及实际价值。

### 参考文献 (References):

- [1] SPROTT J C. Some Simple Chaotic Flows [J]. Phys Rev E, 1994, 50(2): 647-650
- [2] XIA X, ZENG Y, LI Z. Coexisting Multiscroll Hyperchaotic Attractors Generated from A Novel Memristive Jerk System [J]. Pramana, 2018, 91:82-84
- [3] FANG S, LI Z, ZHANG X, et al. Hidden Extreme Multistability in A Novel No-Equilibrium Fractional-Order Chaotic System and Its Synchronization Control [J]. Braz J Phys, 2019, 49(11): 846-858
- [4] KAMDOUM V, TAKOUGANG S, FAUTSO G, et al. Coexistence of Attractors in Autonomous Van Der Pol-Duffing Jerk Oscillator: Analysis Chaos Control and Synchronisation in Its Fractional-Order Form [J]. Pramana, 2018, 91(7):12-16
- [5] LI Y, ZENG Y, ZENG J. A Unique Jerk System with Abundant Dynamics: Symmetric or Asymmetric Bistability Tristability and Coexisting Bubbles [J]. Braz J Phys, 2020, 50(4): 153-163
- [6] SANG B, HUANG B. Zero-Hopf Bifurcations of 3D Quadratic Jerk System [J]. Mathematics, 2020 (8) 1454-1460
- [7] VAIDYANATHAN S. Analysis Control and Synchronization of a Novel 4-D Highly Hyperchaotic System with Hidden Attractors [M]. Springer: Springer International

- Publishing Switzerland, 2016
- [8] DALKIRAN F Y, SPROTT J C. Simple Chaotic Hyperjerk System [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2016, 26(11): 16501—16510
- [9] HOSHAM H A. Nonlinear Behavior of a Novel Switching Jerk System [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2020, 30(14): 2050—2058
- [10] WANG C, XIA H, ZHOU L. A Memristive Hyper-chaotic Multiscroll Jerk System with Controllable Scroll Numbers [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2017, 27(6): 1750—1759
- [11] ZHANG X, WANG C. Multiscroll Hyperchaotic System with Hidden Attractors and Its Circuit Implementation [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2019, 29(9): 1950—1960
- [12] SPROTT J C. Simple Chaotic Systems and Circuits [J]. *Am J Phys*, 2000, 68(8): 758—763
- [13] LU J, CHEN G. Generating Multiscroll Chaotic Attractors: Theories Methods and Applications [J]. *Int J Bifurcat Chaos*, 2006, 16(4): 775—858
- [14] 范盛金. 一元三次方程的新求根公式与新判别法 [J]. *海南师范学院学报:(自然科学版)*, 1989, 2(2): 91—98
- FAN S J. A New Root-Finding Formula and a New Discriminant Method for Cubic Equations with One Variable [J]. *Journal of Hainan Normal University: (Natural Science Edition)*, 1989, 2(2): 91—98 (in Chinese)
- [15] HASSARD B, KAZARINOFF N, WAN Y. Theory and Application of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

## Research on Complex Dynamics of a New 4D Multi-scroll Hyperchaotic Jerk System

HAN Jie, YANG Qi-gui

(School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

**Abstract:** To solve the problem whether a nonlinear hyperchaotic system with only one equilibrium point can generate multi-scroll attractors, a new 4D hyperchaotic smooth system with one nonlinear term and a unique equilibrium point is proposed. Based on the 3D Jerk chaotic system constructed by Sprott, the complex dynamic properties of the new system are analyzed and discussed theoretically by using the Routh-Hurwitz criterion, the central manifold theorem and the mathematical simulation software, and by combining with the feedback control technology and the design method of multi-scroll chaotic system. It is found that there is a unique equilibrium point in the system, and the applicable parameters range of this equilibrium point in different states is given. It is strictly proved that the Hopf bifurcation phenomenon exists in the new system, and the Lyapunov exponential spectrum, bifurcation graph and Poincaré mapping of the new system are further obtained by numerical simulation. It is verified that the new system has only one saddle-focus and can produce complex dynamics such as multi-scroll hyperchaotic attractor and periodic attractor, which enriches the research on hyperchaotic complexity of the existing Jerk system.

**Key words:** hyperchaotic system; multi-scroll system; Jerk system; Lyapunov exponents; Hopf bifurcation

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

韩杰,杨启贵. 新四维多卷超混沌 Jerk 系统的复杂动力学研究[J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2021, 38(5): 29—36  
HAN J, YANG Q G. Research on Complex Dynamics of a New 4D Multi-scroll Hyperchaotic Jerk System [J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2021, 38(5): 29—36