doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0004.013

次分数 Vasicek 利率模型下可分离交易可转债的定价*

程潘红[1,2], 许志宏[1,3]

(1. 上海理工大学 管理学院,上海 200093;2. 滁州学院 数学与金融学院,安徽 滁州 239000;
3. 日照职业技术学院 公共教学部,山东 日照 276826)

摘 要:金融产品的合理定价是其交易的前提;考虑到利率的随机性、金融资产的长记忆性及利率同金融资产价格的相关性,因此,在假定无风险利率满足次分数 Vasicek 模型、股票支付连续红利且股票价格遵循几何次分数布朗运动的条件下,提出可分离交易可转债定价模型;运用次分数布朗运动的 Itô 公式、随机分析理论与风险中性定价理论,推导得到次分数 Vasicek 利率模型下可分离交易可转债定价公式;依据定价模型进行数值模拟,研究结果表明:利率的随机性影响可分离交易可转债的价值,且利率的波动越剧烈,可分离交易可转债的价值变化越显著,说明构建模型时考虑利率变化是非常有必要的;股票价格、执行价格、股票价格波动率、股票价格长程相关性和利率长程相关性等因素对可分离交易可转债定价有着重要的影响。

关键词: 次分数布朗运动;Vasicek 利率模型;可分离交易可转债;随机分析理论;风险中心定价原理

中图分类号:O211.6,F830.9 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2021)04-0084-09

0 引 言

可分离交易可转债(Warrant Bonds,WBS)是兼具债券和股票权证双重特性且两者可分离交易的一种金融衍生品。可分离交易可转债与普通可转债(Convertible Bonds, CBS)的本质区别在于:对 WBS 而言,债券与股票权证可分离交易,即投资 WBS 的客户在行使认股权力后,依然可以持有债券到期获得本利和;而投资 CBS 的客户一旦行使认股权力,仅能持有发行公司的股票,不再拥有债权。

2006 年证监会明确规定上市公司可以发行 WBS 。WBS 作为一种金融工具,既丰富了投资者的选择,又使得企业的资金需求得到满足,融资效率得以提升。WBS 在业界的广泛应用使得一些学者对 WBS 定价问题有着浓厚的研究兴趣。许可和李听[1]应用修正的 Black-Scholes 期权定价模型对 WBS 进行定价研究,并以国内首只 WBS——马钢可转债为研究对象进行实证分析。骆桦和沈红梅[2]采用经典的 Black-Scholes 期权定价模型和稀释效应研究了宝钢 WBS 的定价,为投资者进行决策提供参考。朱丹[3]在研究 WBS 定价问题时,将利率的随机性考虑到定价模型的构建中,并利用拟鞅的方法计算得到 Vasicek 利率模型下 WBS 的定价公式。但大量实证研究表明:金融资产的价格波动具有明显的自相似性和长记忆性。由于分数布朗运动(Fractional Brownian Motion, FBM)刚好具有自相似性和长记忆性等特点,因此可以应用 FBM 刻画金融资产价格的随机波动特征。陈飞跃[4]改进了文献[3]中的 WBS 定价模型,建立了分数布朗运动下 WBS 定价模型,并分析讨论了定价模型中主要参数对 WBS 价值的影响。尤左伟[5]考虑股票价格的长记忆性和分形特征,构建了股票价格遵循几何分数布朗运动的或有可转债定价模型,并应用均衡定价方法与分数布朗运动性质推导得到相应地定价公式。

Rogers[6]和 Cheridito[7]研究发现分数布朗运动

收稿日期:2020-07-09;**修回日期**:2020-08-31.

* **基金项目**:安徽省高校自然科学重点研究项目(KJ2018A0429).

作者简介:程潘红(1988—),女,安徽桐城人,讲师,博士研究生,从事金融产品定价与投资组合优化研究.

应用于金融市场时存在套利机会。为消除基于 FBM 模型所引起的套利行为，可以采用比 FBM 更一般的高斯过程（双分数布朗运动、混合分数布朗运动、次分数布朗运动）来刻画金融资产价格变化的行为模式。如：薛红和金宇寰[8]在考虑利率具有随机性的情形下，建立了双分数布朗运动环境下 CBS 定价模型，并利用保险精算方法求解得到其定价公式。宋瑞等[9]应用双分数布朗运动的性质与鞅方法研究得到马尔可夫调制的双分数布朗运动下亚式期权价格的解析式。Rao[10]假定股票价格满足由混合分数布朗运动驱动的随机微分方程，在此基础上利用风险中性定价原理分别讨论了无风险利率和红利率均为常数时的亚式期权、亚式幂期权定价问题。此外还给出了利率和红利率均为关于时间的非随机函数情形下亚式幂期权的定价公式。尤左伟等[11]构建了利率满足 Vasicek 模型和股票价格遵循几何混合分数布朗运动情形下 CBS 定价模型，利用风险中性定价原理得到 CBS 定价公式，并讨论了赫斯特指数对 CBS 价值的影响。Bojdecki 等[12]首次引入次分数布朗运动（Sub－fractional Brownian Motion，SFBM）的概念，并指出 SFBM 不仅保持了 FBM 的自相似性、长记忆性、Hölder 连续等性质，而且比 FBM 具有更快的退化速度。肖炜麟等[13]利用随机分析理论和偏微分方程方法，研究了 SFBM 下带交易费用的备兑权证定价问题，并对我国权证市场中若干权证进行了实证分析。叶芳琴等[14]提出了 SFBM 下两值期权定价模型，并运用偏微分方程方法推导得到两值期权的定价公式。郭精军，张亚芳[15]在假定利率满足次分数 Vasicek 模型和股票价格遵循几何次分数布朗运动的条件下，建立了基于次分数 Vasicek 利率模型的欧式期权定价模型，并利用次分数 Itô 公式和偏微分方程方法求解模型。区别于文献[15]，孙娇娇[16]利用 Mellin 变换方法推导得到次分数 Vasicek 利率模型下欧式期权价格的解析表达式，并通过数值算例验证了 Mellin 变化方法的收敛性，且探讨了定价模型中主要参数对期权价格的影响。

回顾国内外文献发现，构建合理的金融资产价格动态模型对资产定价和风险管理具有重要意义。已有的关于期权、CBS、WBS 等金融衍生品定价研究主要从以下两个方面展开。一是假定无风险利率是常数的条件下，运用偏微分方程方法或风险中性定价原理研究几种高斯过程驱动下金融衍生品定价问题。二是放宽利率为常数的假定，分别构建不同高斯过程驱动下具有随机利率的金融衍生品定价模型，并采用偏微分方程方法、风险中性定价原理、保险精算方法、Mellin 变换法等不同方法求解定价模型。这些已有成果可以为学者深入研究金融产品的定价提供理论参考。在此基础上，发现有关 WBS 的定价研究存在一些问题：首先，极少有针对次分数布朗运动环境中随机利率情形下 WBS 而展开的定价研究；其次，分数布朗运动具有非平稳增量，且增量非独立，更符合现实情形；再次，关于随机利率下 WBS 定价的现有研究大多假定利率的随机波动与股票价格的动态变化相互独立，而利率作为影响金融市场变化的最基本金融指标，其与股票价格的相关性是 WBS 定价时不可忽略的因素；最后，仅做定价模型的理论研究不能说明不同定价模型的区别，有必要根据理论模型进行数值分析，比较随机利率与常数利率情形下 WBS 定价结果的不同。针对存在的问题，提出了利率随机、金融资产具有长记忆性、股票价格同利率相关的 WBS 定价模型，主要探讨在无风险利率满足次分数 Vasicek 模型、股票支付连续红利且股票价格遵循几何次分数布朗运动条件下的 WBS 定价问题。运用次分数布朗运动的 Itô 公式和性质、风险中性定价原理求解 WBS 的定价公式。通过数值模拟对随机利率和常数利率情形下 WBS 的定价结果进行对比分析，并讨论次分数 Vasicek 利率模型下 WBS 定价模型中不同参数对 WBS 价值的影响。

1　预备知识与主要引理

1.1　次分数布朗运动[12,17-18]

设(Ω,F,P)是一完备的概率空间，F 为样本空间 Ω 的子集构成的一个 σ－代数，P 为概率测度，$F_t=\sigma(B_s^H,0\leqslant s\leqslant t)$，$F_T=F$，称零均值高斯过程$\{\xi_t^H\}_{t>0}$是概率空间上 Hurst 指数 $H\in(0,1)$的次分数布朗运动，如果其协方差函数满足

$$E(\xi_t^H\xi_s^H)=t^{2H}+s^{2H}-\frac{1}{2}[\,|t+s|^{2H}+|t-s|^{2H}]$$

这里 E 表示概率测度 P 下随机变量的期望。特殊地，当 $H=1/2$ 时，ξ_t^H 为标准的布朗运动。

次分数布朗运动具有如下性质：

（1）当 $H\neq1/2$ 时，ξ_t^H 既不是马氏过程，也不是半鞅。

（2）对任意的 $t\geqslant0$，$H\in(0,1)$，$E(\xi_t^H)^2=(2-2^{2H-1})t^{2H}$。

(3) 自相似性:当 $\alpha>0$ 时, $\{\xi_{\alpha t}^{H}, t\geqslant 0\} \overset{d}{=} \alpha^{H}\{\xi_{t}^{H}, t\geqslant 0\}$。

(4) 长记忆性:当 $H\in(1/2,1)$ 时, ξ_{t}^{H} 具有长记忆性,即若令

$$r(n)=\operatorname{cov}(\xi^{H}(1),\xi^{H}(n+1)-\xi^{H}(n))$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} r(n)=\infty$ 。关于次分数布朗运动的更多性质可参阅文献[17-18]。

1.2 WBS 的价值构成[3]

WBS 是由债券和股票期权组合而成的一种金融衍生品,其价值等于纯债券价值和以股票为标的资产的欧式看涨期权价值之和。其到期现金流可表示如下:

$$V(T,S_T)=\begin{cases} P_b, S_T\leqslant\dfrac{P_bC_v}{M} \\ P_b+\theta_1\theta_2(S_T-C_v), S_T>\dfrac{P_bC_v}{M} \end{cases}$$

其中, $P_b=Me^{iT}$ 表示以票面利率 i 计算的纯债券价值, M 表示 WBS 的面值, C_v 表示约定的行权价格, T 表示 WBS 的到期日, S_T 表示 T 时刻的股票价格, θ_1 表示附权证比例, θ_2 表示行权比例, $\theta_1\theta_2$ 表示转股比例。

1.3 主要引理

引理 1[19] 设 $X_1\sim N(0,1)$, $X_2\sim N(0,1)$, $\operatorname{cov}(X_1,X_2)=\rho$,则对 $\forall a,b,c,d,k\in R$,有

$$E(\exp(cX_1+dX_2)I_{\{aX_1+bX_2\geqslant k\}})=$$
$$\exp\left(\frac{c^2+d^2+2\rho cd}{2}\right)N\left(\frac{ac+bd+\rho(ad+bc)-k}{\sqrt{a^2+b^2+2\rho ab}}\right)$$

其中 $N(\cdot)$ 表示标准正态分布函数。

2 定价模型

2.1 模型假设

设 (Ω,F,P) 是一概率空间, $\{\xi_t^H\}_{t>0}$ 是概率空间上的次分数布朗运动。现对金融市场作假设:市场是完备的,且允许卖空;资产完全可分,不存在交易费用及交易税;不存在无风险套利机会;债券价值按照连续复利计算;金融市场上存在两种资产:一种为无风险资产,其利率 r_t 是随机波动的。采用次分数 Vasicek 利率模型刻画利率期限结构动态变化的特征,即 r_t 满足:

$$dr_t=\alpha(\beta-r_t)dt+\delta d\xi_t^{H_1} \tag{1}$$

其中: α,β,δ 均为正常数,分别表示均值回复速率、长期均衡利率和短期利率的波动率。 $\xi_t^{H_1}$ 是 $H_1\in(1/2,1)$ 的次分数布朗运动。

另一种资产为可分离交易可转债,其对应的标的资产价格 S_t 满足如下随机微分方程:

$$dS_t=(\mu_t-q_t)S_tdt+\sigma_tS_td\overline{\xi_t^{H_2}} \tag{2}$$

称标的资产价格 S_t 服从几何次分数布朗运动。其中 μ_t, q_t, σ_t 分别是预期收益率、红利率和波动率,它们均是关于时间 t 的非随机函数, $\overline{\xi_t^{H_2}}$ 是 $H_2\in(1/2,1)$ 的次分数布朗运动。

2.2 次分数 Vasicek 利率模型下 WBS 定价公式

引理 2 假设利率 r_t 满足次分数 Vasicek 的模型式(1),则

$$E\left(\int_t^T r_u du\right)=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha\tau})$$

$$\operatorname{Var}\left(\int_t^T r_u du\right)=\frac{H_1(2H_1-1)\delta^2}{\alpha^2}\times$$
$$\int_t^T\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-u)})(1-e^{-\alpha(T-v)})\varphi_{H_1}(u,v)dudv$$

其中, $\tau=T-t$, $\varphi_{H_1}(u,v)=|u-v|^{2H_1-2}-(u+v)^{2H_1-2}$, $H_1\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$。

证明 由次分数布朗运动的 Itô 公式[20],随机微分方程式(1)的解为

$$r_u=\beta+(r_t-\beta)e^{-\alpha(u-t)}+\delta\int_t^u e^{-\alpha(u-w)}d\xi_w^{H_1}$$

这里 $t\leqslant u\leqslant T$, $H_1\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$,则

$$\int_t^T r_u du=\int_t^T[\beta+(r_t-\beta)e^{-\alpha(u-t)}]du+$$
$$\delta\int_t^T\int_t^u e^{-\alpha(u-w)}d\xi_w^{H_1}du=$$
$$\beta(T-t)+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha(T-t)})+$$
$$\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-w)})d\xi_w^{H_1}$$

记 $X=\dfrac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-w)})d\xi_w^{H_1}$ 。由文献[18]知 X 是零均值正态随机变量,且

$$E(X^2)=\frac{H_1(2H_1-1)\delta^2}{\alpha^2}\times$$
$$\int_t^T\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-u)})(1-e^{-\alpha(T-v)})\varphi_{H_1}(u,v)dudv$$

其中

$$\varphi_{H_1}(u,v)=|u-v|^{2H_1-2}-(u+v)^{2H_1-2}$$

从而

$$E\left(\int_t^T r_u \mathrm{d}u\right)=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})$$

$$\mathrm{Var}\left(\int_t^T r_u \mathrm{d}u\right)=\frac{H_1(2H_1-1)\delta^2}{\alpha^2}\times$$

$$\int_t^T\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-u)})(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-v)})\varphi_{H_1}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

这里 $\tau=T-t$。综上,引理 2 得证!

引理 3　假设股票价格遵循几何次分数布朗运动式(2),则在风险中性测度 Q 下,有

$$S_T=S_t\exp\left(\int_t^T(r_w-q_w)\mathrm{d}w\right)\times$$

$$\exp\left(-(2-2^{2H_2-1})H_2\int_t^T\sigma_w^2 w^{2H_2-1}\mathrm{d}w+\int_t^T\sigma_w \mathrm{d}\xi_w^{H_2}\right)$$

证明　令 $\overline{\xi_t^{H_2}}=\int_0^t\frac{r_w-\mu_w}{\sigma_w}\mathrm{d}w+\xi_t^{H_2}$,则在风险中性概率测度 Q 下,有

$$\mathrm{d}S_t=(r_t-q_t)S_t\mathrm{d}t+\sigma_t S_t\mathrm{d}\xi_t^{H_2}\tag{3}$$

这里 $0\leqslant t\leqslant T$。于是由次分数布朗运动的 Itô 公式[20],易得随机微分方程式(3)的解为

$$S_T=S_t\exp\left(\int_t^T(r_w-q_w)\mathrm{d}w\right)\times$$

$$\exp\left(\sigma^2(t,T)+\int_t^T\sigma_w\mathrm{d}\xi_w^{H_2}\right)$$

其中

$$\sigma^2(t,T)=-(2-2^{2H_2-1})H_2\int_t^T\sigma_w^2 w^{2H_2-1}\mathrm{d}w。$$

定理 4　在利率 r_t 满足次分数 Vasicek 模型、股票价格 S_t 服从几何次分数布朗运动的条件下,具有红利支付的 WBS 在 $t\in[0,T]$ 时刻的价值为

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=P_b\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}+$$

$$\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}D_2}N(d_1)-\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}N(d_2)$$

其中 $N(\cdot)$ 表示标准正态分布的累积概率分布函数,且

$$A=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha\tau})$$

$$D_1=\frac{H_1(2H_1-1)\delta^2}{\alpha^2}\times$$

$$\int_t^T\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-u)})(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-v)})\varphi_{H_1}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$D_2=H_2(2H_2-1)\times\int_t^T\int_t^T\sigma_u\sigma_v\varphi_{H_2}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\varphi_{H_i}(u,v)=|u-v|^{2H_i-2}-(u+v)^{2H_i-2},i=1,2$$

$$\rho=\frac{\delta}{\alpha\sqrt{D_1D_2}}\times\mathrm{cov}\left(\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}\xi_w^{H_1},\int_t^T\sigma_w\mathrm{d}\xi_w^{H_2}\right)$$

$$d_1=\frac{d_0+D_2+\rho\sqrt{D_1D_2}}{\sqrt{D_1+D_2+2\rho\sqrt{D_1D_2}}}$$

$$d_2=d_1-\sqrt{D_1+D_2+2\rho\sqrt{D_1D_2}}$$

$$d_0=\ln\frac{S_tM}{P_bC_v}+A-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)$$

证明　根据风险中性定价原理,WBS 的现值是其到期收益的贴现关于风险中性概率测度 Q 的拟条件期望,则 WBS 在时刻 $t\in[0,T]$的价格为

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}V_T\mid F_t\right)=$$

$$P_bE_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}\mid F_t\right)+\theta_1\theta_2E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}S_TI_{\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\}}\mid F_t\right)-$$

$$\theta_1\theta_2C_vE_Q(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}I_{\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\}}\mid F_t):=$$

$$V_1+V_2-V_3\tag{4}$$

设随机变量 $\int_t^T r_w\mathrm{d}w$ 的均值和方差分别 A 和 D_1,则由引理 2 可知,$\int_t^T r_w\mathrm{d}w$ 是一个正态随机变量,且

$$A=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-e^{-\alpha\tau})$$

$$D_1=\mathrm{Var}(X)=\frac{H_1(2H_1-1)\delta^2}{\alpha^2}\int_t^T\int_t^T(1-$$

$$\mathrm{e}^{-\alpha(T-u)})(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-v)})\varphi_{H_1}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\varphi_{H_1}(u,v)=|u-v|^{2H_1-2}-(u+v)^{2H_1-2},H_1\in\left(\frac{1}{2},1\right)。$$

下面依次计算 V_1、V_2 和 V_3,根据概率知识,易得

$$V_1=P_bE_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}\mid F_t\right)=P_b\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}$$

再计算 V_2,由引理 3 可得

$$V_2=\theta_1\theta_2E_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}S_TI_{\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\}}\mid F_t\right)=$$

$$\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)}\times E_Q(\mathrm{e}^YI_{\{X+Y>-d_0\}}\mid F_t)$$

这里

$$d_0=\ln\frac{S_tM}{P_bC_v}+A-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)$$

$$Y=\int_t^T\sigma_w\mathrm{d}\xi_w^{H_2}$$

由文献[18]知 Y 是一个零均值正态随机变量。不妨设其方差为 D_2,则由次分数布朗运动的等距公式有

$$D_2=\mathrm{Var}(Y)=H_2(2H_2-1)\times$$

$$\int_t^T\int_t^T\sigma_u\sigma_v\varphi_{H_2}(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\varphi_{H_2}(u,v)=|u-v|^{2H_2-2}-(u+v)^{2H_2-2}$$

于是

$$V_2=\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)}\times$$
$$E_Q\left(\mathrm{e}^{\sqrt{D_2}\frac{Y}{\sqrt{D_2}}}I_{\left\{\sqrt{D_1}\frac{X}{\sqrt{D_1}}+\sqrt{D_2}\frac{Y}{\sqrt{D_2}}>-d_0\right\}}\mid F_t\right)$$

设 $\rho=\mathrm{cov}\left(\frac{X}{\sqrt{D_1}},\frac{Y}{\sqrt{D_2}}\right)$

则

$$\rho=\frac{\delta}{\alpha\sqrt{D_1D_2}}\times$$
$$\mathrm{cov}\left(\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}\xi_w^{H_1},\int_t^T\sigma_w\mathrm{d}\xi_w^{H_2}\right)$$

又 $\frac{X}{\sqrt{D_1}}\sim N(0,1)$，$\frac{Y}{\sqrt{D_2}}\sim N(0,1)$，因此，由引理 1 可得：

$$V_2=\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}D_2}N(d_1)$$

其中

$$d_1=\frac{d_0+D_2+\rho\sqrt{D_1D_2}}{\sqrt{D_1+D_2+2\rho\sqrt{D_1D_2}}}$$

最后计算 V_3，

$$V_3=\theta_1\theta_2C_vE_Q\left(\mathrm{e}^{-\int_t^T r_w\mathrm{d}w}I_{\left\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\right\}}\mid F_t\right)=\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A}\times$$
$$E_Q\left(\mathrm{e}^{-\sqrt{D_1}\frac{X}{\sqrt{D_1}}}I_{\left\{\sqrt{D_1}\frac{X}{\sqrt{D_1}}+\sqrt{D_2}\frac{Y}{\sqrt{D_2}}>-d_0\right\}}\mid F_t\right)$$

由引理 1，计算得到

$$V_3=\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}N(d_2)$$

其中

$$d_2=d_1-\sqrt{D_1+D_2+2\rho\sqrt{D_1D_2}}$$

将 V_1、V_2 和 V_3 分别代入式(4)，有

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=P_b\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}+$$
$$\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}D_2}N(d_1)-\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}N(d_2) \tag{5}$$

注：由 WBS 定价式(5)发现：WBS 价值是由一单位纯债券价值 $P_be^{-A+\frac{1}{2}D_1}$ 和 $\theta_1\theta_2$ 单位欧式看涨股票期权价值 $\theta_1\theta_2(S_t\mathrm{e}^{-\int_t^T q_w\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}D_2}N(d_1)-C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}D_1}N(d_2))$ 两部分构成。

推论 5 当红利率 q_t、波动率 σ_t 均为常数，$H_1=H_2=\frac{1}{2}$ 时，则标准的布朗运动环境中随机利率下具有红利支付的 WBS 在 $t\in[0,T]$ 时刻的价值为

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=P_b\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}J}+\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-q\tau}N(d_3)-$$
$$\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}J}N(d_4) \tag{6}$$

其中

$$A=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})$$

$$J=\frac{\delta^2}{2\alpha^3}(2\alpha\tau+4\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}-3)$$

$$\varepsilon=\frac{\delta}{\alpha\sqrt{J\tau}}\left(\tau+\frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-1)\right)$$

$$d_3=\frac{\ln\frac{S_tM}{C_vP_b}+A+\left(\frac{1}{2}\sigma^2-q\right)\tau+\varepsilon\sigma\sqrt{J\tau}}{\sqrt{J+\sigma^2\tau+2\varepsilon\sigma\sqrt{J\tau}}}$$

$$d_4=d_3-\sqrt{J+\sigma^2\tau+2\varepsilon\sigma\sqrt{J\tau}}$$

证明 当 $H_1=\frac{1}{2}$ 时，则

$$\int_t^T r_u\mathrm{d}u=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})+\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-e^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w$$

因为 $\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w$ 是一个零均值随机变量，且其方差为

$$J=\mathrm{Var}\left(\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w\right)=$$
$$\frac{\delta^2}{\alpha^2}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})^2\mathrm{d}w=\frac{\delta^2}{2\alpha^3}(2\alpha\tau+4\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-\mathrm{e}^{-2\alpha\tau}-3)$$

所以

$$E\left(\int_t^T r_u\mathrm{d}u\right)=\beta\tau+\frac{r_t-\beta}{\alpha}(1-\mathrm{e}^{-\alpha\tau})$$

$$\mathrm{Var}\left(\int_t^T r_u\mathrm{d}u\right)=\mathrm{Var}\left(\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w\right)=J$$

当红利率 q_t、波动率 σ_t 均为常数，$H_2=\frac{1}{2}$ 时，有

$$S_T=S_t\mathrm{e}^{\int_t^T r_w dw-(q+\frac{1}{2}\sigma^2)\tau+\sigma(B_T-B_t)}$$

又 B_T-B_t 是零均值高斯过程，且

$$E(B_T-B_t)^2=\tau$$

根据标准布朗运动的等距公式，可计算得到 $\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w$ 与 $\int_t^T\sigma\mathrm{d}B_w$ 的相关系数为

$$\varepsilon=\frac{\mathrm{cov}\left(\frac{\delta}{\alpha}\int_t^T(1-\mathrm{e}^{-\alpha(T-w)})\mathrm{d}B_w,\int_t^T\sigma\mathrm{d}B_w\right)}{\sigma\sqrt{J\tau}}=$$
$$\frac{\delta}{\alpha\sqrt{J\tau}}\left(\tau+\frac{1}{\alpha}(\mathrm{e}^{-\alpha\tau}-1)\right)$$

则类似于定理 4 的证明，易得定价式(6)。

注：在定价式(6)中，当 $q=0$，$\varepsilon=0$ 时，有

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=P_b\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}J}+\theta_1\theta_2S_tN(d_5)-$$
$$\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-A+\frac{1}{2}J}N(d_6)$$

其中

$$d_5=\frac{\ln\frac{S_tM}{C_vP_b}+A+\frac{1}{2}\sigma^2\tau}{\sqrt{J+\sigma^2\tau}}$$

$$d_6=d_5-\sqrt{J+\sigma^2\tau}$$

这里 WBS 的定价结果与文献[3]给出的结论一致。

推论 6　当无风险利率 r_t、红利率 q_t、波动率 σ_t 均为常数时,则次布朗运动环境下具有红利支付的 WBS 在 $t\in[0,T]$时刻价值为

$$V_{\mathrm{WBS}}(t,T,r_t,S_t)=P_b\mathrm{e}^{-r\tau}+\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-q\tau+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}\sigma^2B^2(t,T)}N(d_7)-\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-r\tau}N(d_8)$$

其中

$$d_7=\frac{\ln\frac{S_tM}{P_bC_v}+(r-q)\tau+\sigma^2(t,T)+\sigma^2B^2(t,T)}{\sigma B(t,T)}$$

$$d_8=d_7-\sigma B(t,T)$$

$$B^2(t,T)=-2^{2H_2-1}(T^{2H_2}+t^{2H_2})+(T+t)^{2H_2}+|T-t|^{2H_2}$$

证明　当无风险利率 r_t 为常数时,有

$$E_Q\left(e^{-\int_t^T r_w dw}V_T\,|\,F_t\right)=\mathrm{e}^{-r\tau}E_Q(V_T\,|\,F_t)=P_b\mathrm{e}^{-r\tau}+\theta_1\theta_2\mathrm{e}^{-r\tau}E_Q\left(S_TI_{\left\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\right\}}\,\middle|\,F_t\right)-\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-r\tau}E_Q\left(I_{\left\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\right\}}\,\middle|\,F_t\right):=P_b\mathrm{e}^{-r\tau}+V_2-V_3\quad(7)$$

进一步,当红利率 q_t、波动率 σ_t 均为常数时,由引理 2 有

$$S_T=S_t\mathrm{e}^{\int_t^T(r_w-q_w)\mathrm{d}w+\sigma^2(t,T)+\int_t^T\sigma_w\mathrm{d}\xi_t^{H_2}}=S_t\mathrm{e}^{(r-q)\tau+\sigma^2(t,T)}\times\mathrm{e}^{(\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2})}$$

由次分数布朗运动的定义可知:$\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2}$ 是零均值高斯过程,且根据次分数布朗运动的等距公式,有

$$\mathrm{Var}(\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2})=E(\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2})^2=H_2(2H_2-1)\times\int_t^T\int_t^T[\,|u-v|^{2H_2-2}-(u+v)^{2H_2-2}]\mathrm{d}u\mathrm{d}v=-2^{2H_2-1}(T^{2H_2}+t^{2H_2})+(T+t)^{2H_2}+|T-t|^{2H_2}:=B^2(t,T)$$

因此,类似定理 4 的证明,分别得到式(7)中的第二项 V_2 和第三项 V_3。

$$V_2=\theta_1\theta_2\mathrm{e}^{-r\tau}E_Q\left(S_TI_{\left\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\right\}}\,\middle|\,F_t\right)=\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-q\tau+\sigma^2(t,T)}\times E_Q\left(\mathrm{e}^{\sigma(\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2})}I_{\left\{\sigma(\xi_T^{H_2}-\xi_t^{H_2})>\ln\frac{P_bC_v}{S_tM}-(r-q)\tau-\sigma^2(t,T)\right\}}\,\middle|\,F_t\right)=\theta_1\theta_2S_t\mathrm{e}^{-q\tau+\sigma^2(t,T)+\frac{1}{2}\sigma^2B^2(t,T)}N(d_7)$$

$$V_3=\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-r\tau}\times E_Q\left(I_{\left\{S_T>\frac{P_bC_v}{M}\right\}}\,\middle|\,F_t\right)=\theta_1\theta_2C_v\mathrm{e}^{-r\tau}N(d_8)$$

其中

$$d_7=\frac{\ln\frac{S_tM}{P_bC_v}+(r-q)\tau+\sigma^2(t,T)+\sigma^2B^2(t,T)}{\sigma B(t,T)}$$

$$d_8=d_7-\sigma B(t,T)$$

综上,推论 6 得证。

3　数值分析

数值分析主要包括两个部分。一是通过数值算例直观地呈现次分数布朗运动环境中基于随机利率、常数利率这两种情形的 WBS 定价结果,二是讨论随机利率情形下次分数布朗运动模型中不同参数对 WBS 价格的影响。

考虑 1 份 2 a 到期具有利率风险的可分离交易可转债,其标的资产服从几何次分数布朗运动。可分离交易可转债定价模型的参数取值如表 1 所示。

表 1　定价模型中参数取值表

Table 1　Parameter value table in pricing model

取　值	α	β	r	δ	θ_1	θ_2	M	C_v	i	t	H_1	H_2	S_t	q	σ
BM	0.8	0.05	0.3	0.2	0.4	0.5	100	20	0.06	0	0.5	0.5	15	0.05	0.25
SFBM	0.8	0.05	0.3	0.2	0.4	0.5	100	20	0.06	0	0.7	0.75	15	0.05	0.25

3.1　利率风险对 WBS 价值的影响

为了研究利率的随机波动对 WBS 价值的影响,对次分数布朗运动环境中随机利率和常数利率情形下 WBS 定价结果进行了比较分析,结果如图 1 所示。

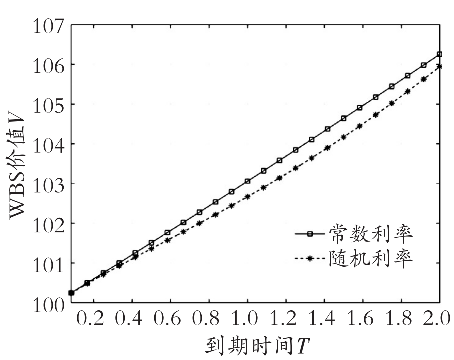


图 1　可分离交易可转债的期限结构

Fig. 1　Term structure of warrant bonds

从图 1 可以看出:可分离交易可转债的期限结构随着时间的推移而上升, $T\in[1/12,2]$。主要原因在于:可分离交易可转债兼具债券与期权的特性,一是随着持有可转债的期限越长,投资者能够获取较多的利息;二是可转债隐含的期权价值随着剩余期限的增加在逐渐增加。

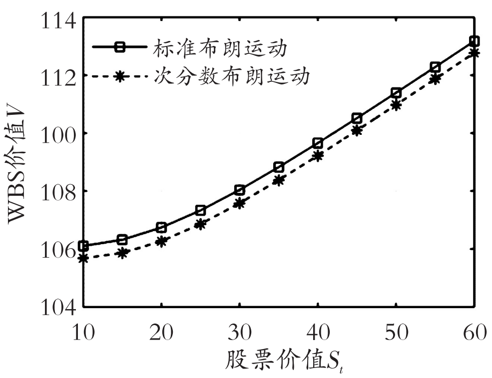
此外,观察图 1 可以发现:常数利率情形下 WBS

价值高于随机利率情形下 WBS 价值,表明利率的随机波动降低了 WBS 的价值,这主要是对投资者承担利率随机波动可能会带来的风险进行补偿。这也说明利率的随机性是 WBS 定价时不可忽略的因素。

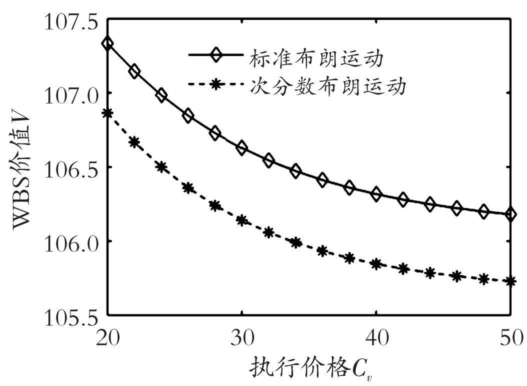
3.2 SFBM 模型中主要参数对 WBS 价值的影响

现研究 SFBM 模型中不同参数,如股票价格 S_t、执行价格 C_v、波动率 δ 和 σ、赫斯特指数 H_1 和 H_2 对 WBS 价值的影响。

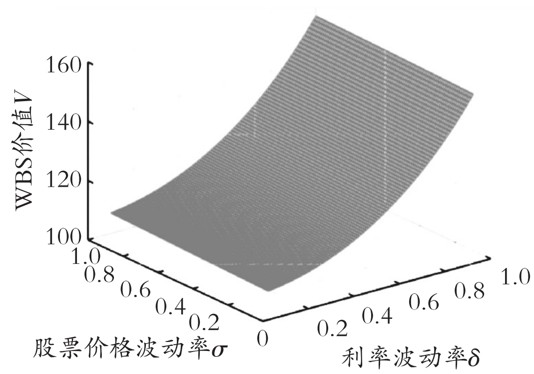
图 2(a)为股票价格 S_t 对 WBS 价值影响的图像,其中 $S_t \in [10,60]$,WBS 价值是 S_t 的增函数。这源于 WBS 隐含的看涨期权价值随着股票价格的增加而增加。图 2(b)为 WBS 价值关于执行价格 C_v 变化的图像,可以看出 WBS 价值是 C_v 的减函数,其中 $C_v \in [20,50]$。此外,从图 2(a)和图 2(b)可以看出:基于次分数 Vasicek 利率模型的 WBS 价值低于标准布朗运动模型下的价值,说明“长记忆性”对 WBS 定价结果有着显著的影响。这是由于次分数布朗运动在赫斯特指数大于 1/2 时,存在状态持续性,即长记忆性,因此在某个时间段内市场具有周期性,投资风险变小,期权价值降低,从而 WBS 价值减小。图 2(c)为 WBS 价值关于股票价格波动率、利率波动率的图像,$\delta \in [0.1,1]$,$\sigma \in [0.1,1]$。观察图形发现:WBS 价值随着股票价格波动率、利率波动率的增加而增加,并且利率波动率的变化对 WBS 价值影响较大。图 2(d)直观地呈现了赫斯特指数 $H_1, H_2 \in [0.51,0.95]$ 对 WBS 价值的影响。可以看出:随着 H_1 的增加,WBS 价值先增后减;随着 H_2 的增加,WBS 价值随之加大,即 WBS 价值随着利率长程相关性增强先升高后降低,随着股票价格长程相关性增强而升高。



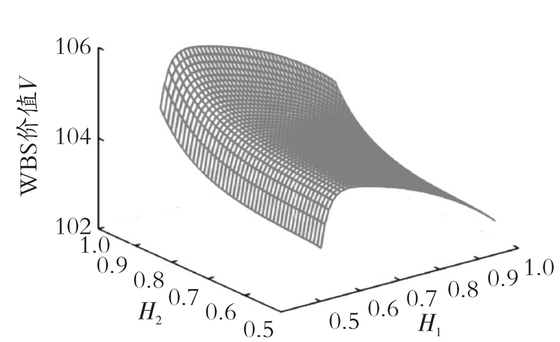
(a) 股票价格对 WBS 价值影响



(b) 执行价格变化



(c) 股票价格利率及波动率



(d) 赫斯特指数对 WBS 价值影响

图 2 WBS 价值 V_{WBS} 与不同参数的关系

Fig. 2 The relationship between WBS value V_{WBS} and different parameters

4 结论与展望

在考虑利率随机及金融资产具有“长记忆性”的情形下,采用修正的分数布朗运动即次分数布朗运动刻画利率期限结构动态变化的特征、股票价格变化的行为模式,构建了更加贴近金融市场实际的可分离交易可转债定价模型,并运用随机分析理论与风险中性定价理论,推导得到基于次分数 Vasicek 利率模型的股票支付红利且股票价格遵循几何次分数布朗运动 WBS 定价公式。依据定价模型进行数值模拟,研究结果表明:利率的随机性影响 WBS 价

值,且利率的波动越剧烈,WBS 价值变化越显著,说明构建模型时考虑利率变化是非常有必要的;股票价格、执行价格、股票价格波动率、股票价格长程相关性和利率长程相关性等因素都对 WBS 定价有着重要的影响。具体体现为:随着股票价格、股票价格波动率、股票价格长程相关性增加,WBS 价值随之增加;随着执行价格的增加,WBS 价值逐渐减小,并且次分数布朗运动下 WBS 定价结果与标准布朗运动下 WBS 定价结果之间的差异也在逐渐增大;随着利率长程相关性增强,WBS 价值先升后降。

针对提出的 WBS 定价模型,还可以就模型中参数估计问题开展研究工作,即采用有效方法构建参数估计量,并着重探讨估计量的收敛性和渐近特征。此外,可以将研究思路和证明方法推广到研究其他高斯过程(双分数布朗运动、混合分数布朗运动、赋权分数布朗运动)下可分离交易可转债、普通可转债、期权定价问题,并比较分析不同模型的定价结果,从而选择最为贴近市场的定价模型。

参考文献(References):

[1] 许可,李听. “马钢”可分离可转债定价实证分析[J]. 管理学报,2007,4(6):815—819
XU K, LI T. An Empirical Analysis on Pricing of Masteel Warrant Bonds [J]. Chinese Journal of Management, 2007, 4(6):815—819(in Chinese)

[2] 骆桦,沈红梅. 分离交易可转换债券在我国的实际应用[J]. 浙江理工大学学报,2009,26(5):796—801
LUO H, SHEN H M. On the Practical Application of Bonds with Attached Warrant in Our Country[J]. Journal of Zhejiang Science and Technology University, 2009, 26(5):796—801(in Chinese)

[3] 朱丹. 随机利率下可分离交易可转换债券的鞅定价[J]. 应用数学学报,2011,34(2):265—271
ZHU D. The Martingale Pricing for Warrant Bonds under Stochastic Interest Rate[J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2011, 34(2):265—271(in Chinese)

[4] 陈飞跃. 分数布朗运动下可分离交易可转债的定价[J]. 数学的实践与认识,2018,48(20):279—287
CHEN F Y. The Pricing for Warrant Bonds under Fractional Brownian Motion[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2018, 48(20):279—287(in Chinese)

[5] 尤左伟,刘善存. 分数布朗运动下或有可转债定价模型[J]. 北京航空航天大学学报(社会科学版),2019,32(4):78—86
YOU Z W, LIU S C. Pricing Cocos in Fractional Brownian Motion Environment [J]. Journal of Beijing University of Aeronautics and Astronautics (Social Sciences Edition), 2019, 32(4):78—86(in Chinese)

[6] ROGERS L C G. Arbitrage with Fractional Brownian Motion[J]. Mathematical Finance,1997,7(1):95—105

[7] CHERIDITO P. Arbitrage in Fractional Brownian Motion Models[J]. Finance Stochastics, 2003, 7(4):533—553

[8] 薛红,金宇寰. 随机利率下具有红利支付的可转换债券定价[J]. 哈尔滨商业大学学报(自然科学版),2016,32(3):369—372
XUE H, JIN Y H. Pricing Convertible Bond with Dividend Paying under Stochastic Interest Rate[J]. Journal of Harbin University of Commerce (Natural Sciences Edition), 2016, 32(3):369—372(in Chinese)

[9] 宋瑞,李旭,王伟. 马尔可夫调制的双分数布朗运动模型下亚式期权定价[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2019,36(1):73—77
SONG R, LI X, WANG W. Asian Option Pricing in Double Fractional Brownian Model with Markovian Switching[J]. Journal of Chongqing and Technology Business University(Natural Sciences Edition), 2019, 36(1):73—77(in Chinese)

[10] RAO P B. Pricing Geometric Asian Power Options under Mixed Fractional Brownian Motion Environment [J]. Physica A, 2016, 446(1):92—99

[11] 尤左伟,刘善存,张强. 混合分数布朗运动下可转债定价模型研究[J]. 系统工程理论与实践,2017,37(4):844—855
YOU Z W, LIU S C, ZHANG Q. Convertible Bond Pricing in a Mixed Fractional Brownian Motion Environment [J]. Systems Engineering – Theory & Practice, 2017, 37(4):844—855(in Chinese)

[12] BOJDECKI T, GOROSTIZA L G, TALARCZYK A. Subfractional Brownian Motion and Its Relation to Occupation Times[J]. Statistics & Probability Letters, 2004, 69(4):405—419

[13] 肖炜麟,张卫国,徐维军. 次分数布朗运动下带交易费用的备兑权证定价[J]. 中国管理科学,2014,22(5):1—7
XIAO W L, ZHANG W G, XU W J. Pricing Covered Warrants in a Subfractional Brownian Motion with Transition Costs[J]. Chinese Journal of Management Science, 2014, 22(5):1—7(in Chinese)

[14] 叶芳琴,刘文倩,林先伟. 次分数布朗运动下带红利的两值期权定价[J]. 汕头大学学报(自然科学版),2019,34(1):13—18
YE F Q, LIU W Q, LIN X W. Pricing Binary Option

under Subfractional Brownian Motion [J]. Journal of Shantou University (Natural Science Edition), 2019, 34 (1):13—18(in Chinese)

[15] 郭精军,张亚芳.次分数 Vasicek 随机利率模型下的欧式期权定价[J].应用数学,2017,30(3):503—511
GUO J J, ZHANG Y F. European Option Pricing under Subfractional Vasicek Stochastic Interest Rate Model[J]. Mathematica Applicate,2017,30(3):503—511(in Chinese)

[16] 孙娇娇.次分数随机利率模型下欧式期权定价的 Mellin 变换法[J].河北师范大学学报(自然科学版), 2020, 44(1):18—24
SUN J J. Mellin Transform Method for European Option Pricing under Subfractional Stochastic Interest Rate Model [J]. Journal of Hebei Normal University (Natural Science Edition), 2020, 44(1):18—24(in Chinese)

[17] TUDOR C. Some Properties of the Subfractional Brownian Motion[J]. Stochastics, 2007, 79(5):431—448

[18] XIAO W L, ZHANG X L, ZUO Y. Least Squares Estimation for the Drift Parameters in the Subfractional Vasicek Processes[J]. Journal of Statistical Planning and Inference, 2018, 197(1):141—155

[19] STEVEN S E. Stochastic Calculus and Finance [M]. New York:Springer-Verlag, 1996

[20] YAN L T, SHEN G J, HE K. Itô's Formula for the Subfractional Brownian Motion [J]. Communication on Stochastic Analysis, 2011, 5(1):135—159

Pricing for Warrant Bonds under Sub-fractional Vasicek Interest Rate Model

CHENG Pan-hong[1,2], XU Zhi-hong[1,3]

(1. Business School, University of Shanghai for Science & Technology, Shanghai 200093, China;
2. School of Mathematics and Finance, University of Chuzhou, Anhui Chuzhou 239000, China;
3. Public Teaching Department, Rizhao Polytechnic College, Shandong Rizhao 276826, China)

Abstract: The reasonable pricing of financial products is the premise of their transaction. Considering the randomness of interest rates, the long memory of financial assets and the correlation between interest rate and financial asset price, the pricing model of warrant bonds is proposed under the assumption that the risk-free interest rate satisfies the sub-fractional Vasicek model, the stock pays continuous dividends and the stock price follows the geometric sub-fractional Brownian motion. By applying the Itô formula of sub-fractional Brownian motion, stochastic analysis theory and risk neutral pricing theory, the pricing formula of warrant bonds is obtained. According to the pricing model, the numerical simulation results show that the randomness of interest rates affects the value of warrant bonds, and the more intense the fluctuation of interest rates, the more significant the value changes of warrant bonds. This shows that it is necessary to consider the change of interest rates when constructing the model. Stock price, exercise price, volatility of stock price, long-range correlation of stock price and long-range correlation of interest rates have important influence on the pricing of warrant bonds.

Key words: sub-fractional Brownian motion; Vasicek interest rate model; warrant bonds; stochastic analysis theory; risk neutral pricing principle

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:
程潘红,许志宏.次分数 Vasicek 利率模型下可分离交易可转债的定价[J].重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(4):84—92
CHENG P H,XU Z H. Pricing for Warrant Bonds under Sub-fractional Vasicek Interest Rate Model[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2021,38(4):84—92