

一类随机互惠模型的遍历性和最优收获策略*

罗俊威

(南京财经大学 应用数学学院,南京 210023)

摘要:讨论一个非线性生物互惠模型在随机扰动环境下的性质特征,以及最优收获策略问题。为了解模型系统的动力学特征,首先利用随机方程的比较原理证明系统解的存在唯一性,并给出两物种平均持续存在的条件;然后利用集合和遍历的方法得到最优收获策略的表达形式,且利用数值模拟直观表现物种在捕获条件下的生长情况,并与所得的理论结果吻合;这帮助人类在充分获取自然资源并获得最大收益的同时,也能使物种生物量维持在一个合理的水平,避免物种灭绝,保证生物多样性。

关键词:最优收获策略;随机互惠模型;持续与灭绝;遍历性;Itô 公式

中图分类号: O175.13;O29

文献标志码: A

文章编号: 1672-058X(2021)04-0068-05

0 引言

近年来,随着可持续发展战略被大力宣传与实施,更多的研究者也把注意力放在了自然资源的分配与使用中,例如天然气、化石燃料、金属以及生物资源都受到了重视。虽然部分资源本身具有可再生的能力,但是过度开采已经使得那些不可再生资源处于短缺甚至耗尽边缘,而且很多动物在大肆的捕获下也濒临灭绝。因此,最优收获问题应运而生,如何控制收获力度保证可持续发展成为很多生物研究者的研究主题。

随着研究的深入,不少研究者发现生物模型不仅由物种的内在增长率、环境容纳量等确定的参数构成,而且人类社会以及自然因素,例如温度的变化、森林大火、金融危机等也会影响模型的构建。因此,随机扰动或大或小地改变着物种生物量原有的增长状态。事实上,很多学者早已经开始探索随机生物模型的最优收获问题。例如,May 和 Beddington^[1]对典型的对数模型 $dN(t) = N(t)(r - c - aN(t))dt + \alpha N(t)$

$dB(t)$ 进行了收获问题的研究并得出有效结论,即当 $c < r - 0.5\alpha^2$ 时,得到最优收获效力 $c^* = \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)/2$,

最大可持续产出 $\max Y(c) = \left(r - \frac{\alpha^2}{2}\right)^2/4a$; Li 和 Wang^[2]重点考察一般对数模型在随机噪声下的收获问题,引入的一般对数项为 $\dot{x}(t) = ax(t) - bx^{\theta+1}(t)$,并在此基础上加入白噪声,同样得到最大可持续产出的复杂表达形式;刘国栋和孟新柱^[3]深入探讨一个生物互惠系统在受到随机扰动、环境污染以及其他噪声条件下的最优收获策略问题,在较为复杂的条件下求得了最优收获的具体值。除互惠模型外,生物间的其他关系也被广泛研究,如刘猛^[4]考虑了捕食-被捕食模型在随机扰动下的最优收获问题;凌亚茹^[5]在捕食-被捕食关系的基础上加入时间参数,研究周期解的存在唯一性、持续性与持久性以及最优收获策略问题。

目前,大部分的研究(如文献[3,6,9,11])都是对典型的线性 Lotka-Volterra 模型进行一系列的研究,本文则主要考察 May 在文献[7]中提到的一类

收稿日期:2020-07-16;修回日期:2020-09-04.

* 基金项目:国家自然科学基金项目资助(11601225).

作者简介:罗俊威(1996—),男,安徽黄山人,硕士研究生,从事生物数学研究.

非线性互惠模型,其表达式如下:

$$\begin{cases} dx(t) = x(t) \left(r_1 - \frac{b_1 x(t)}{K_1 + f(y(t))} - \varepsilon_1 x(t) \right) dt - \\ \quad q_1 x(t) dt + \alpha_1 x(t) dW_1(t) \\ dy(t) = y(t) \left(r_2 - \frac{b_2 y(t)}{K_2 + g(x(t))} - \varepsilon_2 y(t) \right) dt - \\ \quad q_2 y(t) dt + \alpha_2 y(t) dW_2(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中: $x(t), y(t)$ 代表两个物种在时刻 t 时的数量密度; $r_i (i=1, 2)$ 表示物种 $x(t), y(t)$ 的内在增长率; K_1 是在没有 $y(t)$ 的影响下环境对 $x(t)$ 的容纳量, K_2 反之; $q_i (i=1, 2)$ 表示分别对 $x(t), y(t)$ 的收获效力; b_i 表示互惠系数; ε_i 表示种内竞争系数; $r_i, K_i, b_i, \varepsilon_i$ 都是正常数, 并且 $f(\cdot), g(\cdot)$ 为单调连续递增的正函数; $W_i(t) (i=1, 2)$ 是两个标准布朗运动, 其中 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 代表域流为一个 σ -代数, $\alpha_i^2 (i=1, 2)$ 代表着白噪声的强度。 f, g 的存在也让这个模型具有代表性, 下面主要对其在白噪声扰动下的随机性质以及最优收获问题进行探讨。

这篇文章的主要目的就是去讨论是否存在一个最优收获系数(OHE): $Q^* = (q_1^*, q_2^*)$ 满足下面的条件:

- (1) $x(t)$ 和 $y(t)$ 都是持续存在的;
- (2) 确定期望的可持续产出(ESY):

$$Y(Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(q_1 x(t) + q_2 y(t))$$

有最优值或范围。

1 预备知识

首先, 假定 $W_i(t) (i=1, 2)$ 定义在域流为 $\{F_t\}_{t \geq 0}$ 的完备概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{t \geq 0}, P)$ 上, $X(t) = (x(t), y(t)), |X(t)| = \sqrt{x^2(t) + y^2(t)}$ 。在文章开始之前, 定义一些符号并且引入一些必要的引理。首先, 令

$$f^l = \liminf_{t \rightarrow \infty} f(\cdot), f^u = \limsup_{t \rightarrow \infty} f(\cdot)$$

引理 1^[8-9] 设 $\varphi(t) \in [\Omega \times [0, +\infty), R_+]$,

(1) 如果存在 3 个常数 λ_0, λ 和 $T \geq 0$, 使得对所有的 $t \geq T$, 有

$$\ln \varphi(t) \leq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t \varphi(s) ds + \alpha \sum_{i=1}^2 W_i(t), \text{ a. s.}$$

其中 α 是常数, 于是

$$\begin{cases} \limsup_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \varphi(s) ds \leq \frac{\lambda}{\lambda_0}, \text{ a. s.}, \lambda \geq 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = 0, \text{ a. s.}, \lambda \geq 0 \end{cases}$$

(2) 如果存在 3 个常数 λ_0, λ 和 $T \geq 0$, 使得对所有的 $t \geq T$, 有

$$\ln \varphi(t) \geq \lambda t - \lambda_0 \int_0^t \varphi(s) ds + \alpha \sum_{i=1}^2 W_i(t), \text{ a. s.}$$

于是

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t \varphi(s) ds \geq \frac{\lambda}{\lambda_0} \text{ a. s.}$$

定义 1 如果 $x(t), y(t)$ 满足条件:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds > 0, \text{ a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds > 0, \text{ a. s.}$$

于是就说式(1)是平均持续的。

2 主要结论

系统正解的存在唯一性对后续性质的探讨起着至关重要的作用, 接下来, 先证明式(1)存在唯一全局正解。

定理 1 对于给定的正初值 (x_0, y_0) , 式(1)有一个唯一全局正解 $(x(t), y(t))$ 。

证明 令 $u(t) = \ln x(t), v(t) = \ln y(t)$, 对式(1)使用 Itô 公式, 得到

$$\begin{cases} du(t) = \left(r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{b_1 e^{u(t)}}{K_1 + f(y(t))} - \varepsilon_1 e^{u(t)} \right) dt + \\ \quad \alpha_1 dW_1(t) \\ dv(t) = \left(r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} - \frac{b_2 e^{v(t)}}{K_2 + g(x(t))} - \varepsilon_2 e^{v(t)} \right) dt + \\ \quad \alpha_2 dW_2(t) \end{cases} \quad (2)$$

其中: $t \geq 0$, 初值 $u(0) = \ln x_0, v(0) = \ln y_0$, 由于系数满足李普希茨条件, 再利用文献[14]中随机微分方程的理论, 可证式(1)在 $t \in [0, \tau)$ 上有唯一局部解, 其中 τ 为爆破时间, 因此 $(x(t), y(t))$ 有唯一局部解。对于全局解, 即 $\tau \rightarrow +\infty$ 时, 利用随机方程的比较原理, 参考文献[10]中的方法, 得证。

生物的持续与灭绝对维持自然界物种多样性起着至关重要的作用, 物种生物量的多少也决定着人类如何实施最优收获策略。下面开始讨论生物持续生存的条件。

定理 2 如果 $r_i - q_i > \frac{\alpha_i^2}{2} (i=1, 2)$, 并且 $X(t)$ 是

式(1)关于初值 (x_0, y_0) 的解, 就有式(1)是平均持续的。

证明 对式(1)的第一个等式使用 Itô 公式, 可以得到

$$d \ln x(t) = \left(r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} - \frac{b_1 x}{K_1 + f(y(t))} - \varepsilon_1 x \right) dt + \alpha_1 dW_1(t)$$

令 $d_1 = r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}, d_2 = r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}$, 两边同时积分, 根据引理 1 可得以下结果:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t x(s) ds \geq \frac{d_1}{\frac{b_1}{K_1} + \varepsilon_1} \quad \text{a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t x(s) ds \leq \frac{d_1}{\frac{b_1}{K_1 + f^u} + \varepsilon_1} \quad \text{a. s.}$$

同样, 对 $y(t)$, 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t y(s) ds \geq \frac{d_2}{\frac{b_2}{K_2} + \varepsilon_2} \quad \text{a. s.}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{-1} \int_0^t y(s) ds \leq \frac{d_2}{\frac{b_2}{K_2 + g^u} + \varepsilon_2} \quad \text{a. s.}$$

从而证明了系统平均持续性。

探讨最优收获策略不仅能帮助人类充分利用自然资源并获得最大收益, 而且也能保证物种生物量维持在一个合理的水平, 避免因过度开发而灭绝。在确定最优收获策略之前, 先给出一个引理。

引理 2 式(1)在分布上是渐进稳定的, 也就是说, 存在一个唯一的概率测度 $\mu(\cdot)$, 使得对任意的 $X(0) \in R_+^2$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $X(t)$ 的转移概率 $p(t, X(0), \cdot)$ 弱收敛于 $\mu(\cdot)$ 。

证明 证明方法可参考文献[11]。

定理 3 式(1)的测度 $\mu(\cdot)$ 具有遍历性。

证明 根据引理 2, 可知式(1)的不变测度 $\mu(\cdot)$ 是唯一的。利用文献[12]中的推论 3.4.3, 可得 $\mu(\cdot)$ 是强混合的。同样, 基于文献[12]中的定理 3.2.6, 则 $\mu(\cdot)$ 具有遍历性。

现在, 开始确定式(1)的最优收获策略。

定理 4 如果定理 2 的条件满足, 也就是说 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是平均持续的, 则存在 $Y(Q)$ 的一个下界 $\underline{Y}(Q)$ 和一个上界 $\bar{Y}(Q)$, 并且有一个正常数 $Y^* \in (\underline{Y}(Q), \bar{Y}(Q))$, 使得 $Y(Q) = Y^*$ 。同样可得到其对应的收获效力 Q^* , 满足下列等式:

$$\underline{Y}(Q) = q_1 \frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1} + \varepsilon_1} + q_2 \frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2} + \varepsilon_2}$$

$$\bar{Y}(Q) = q_1 \frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1 + f^u} + \varepsilon_1} + q_2 \frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2 + g^u} + \varepsilon_2}$$

以及

$$Q^*(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{2} \left(r_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}, r_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right)$$

证明 令 $Q = (q_1, q_2)^T > 0$, 并且 $x(t), y(t)$ 是平

均持续的, 得到

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q^T X(s) ds = q_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + q_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \quad (3)$$

通过引理 2, 再利用文献[12]中的式(3.3.2), 有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t Q^T X(s) ds = \int_{R_+^2} Q^T X \mu(dX) \quad (4)$$

设 $\tau(X)$ 表示式(1)的平稳概率密度, 则

$$Y(Q) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(q_1 x(t) + q_2 y(t)) = \lim_{t \rightarrow \infty} E(Q^T X(t)) = \int_{R_+^2} Q^T X \tau(X) dX \quad (5)$$

由于式(1)的不变测度具有唯一性, 推出

$$\int_{R_+^2} Q^T X \tau(X) dX = \int_{R_+^2} Q^T X \mu(dX) \quad (6)$$

结合式(3)–(6)得到最优收获的表达式:

$$Y(Q) = q_1 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds + q_2 \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds \text{ 和 } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds \text{ 的范围在定}$$

理 2 中已经得出, 但由于无求出具体的极限值, 只获得了 $Y(Q)$ 的一个范围区间, 如下:

$$\underline{Y}(Q) \leq Y(Q) \leq \bar{Y}(Q)$$

其中:

$$\underline{Y}(Q) = q_1 \frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1} + \varepsilon_1} + q_2 \frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2} + \varepsilon_2}$$

$$\bar{Y}(Q) = q_1 \frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1 + f^u} + \varepsilon_1} + q_2 \frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2 + g^u} + \varepsilon_2}$$

由于连续性, 可以知道存在两个正常数

$$N_1 \in \left(\frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1} + \varepsilon_1}, \frac{r_1 - q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1 + f^u} + \varepsilon_1} \right)$$

$$N_2 \in \left(\frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2} + \varepsilon_2}, \frac{r_2 - q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2 + g^u} + \varepsilon_2} \right)$$

使得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds = N_1$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds = N_2$$

于是存在 $Y^* \in (\underline{Y}(Q), \bar{Y}(Q))$, 使得最优收获 $Y(Q) = Y^* = q_1 N_1 + q_2 N_2$, 再以 $\underline{Y}(Q)$ 为例, 对 q_1, q_2

求偏导等于零:

$$\begin{cases} \frac{dY(Q)}{dq_1} = \frac{r_1 - 2q_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}}{\frac{b_1}{K_1} + \varepsilon_1} = 0 \\ \frac{dY(Q)}{dq_2} = \frac{r_2 - 2q_2 - \frac{\alpha_2^2}{2}}{\frac{b_2}{K_2} + \varepsilon_2} = 0 \end{cases}$$

得到对应的最优收获效力 $(\underline{q}_1, \underline{q}_2) = \frac{1}{2} \left(r_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}, r_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right)$ 。

同样, $\bar{Y}(Q)$ 的最优收获效力 $(\bar{q}_1, \bar{q}_2) = \frac{1}{2} \left(r_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}, r_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right)$, 可以发现在两个不同的收获量下, 最优收获效力没有改变。所以对于 Y^* 而言, 它所对应的最优收获效力 $(q_1^*, q_2^*) = \frac{1}{2} \left(r_1 - \frac{\alpha_1^2}{2}, r_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right)$, 这一点根据 $f(\cdot), g(\cdot)$ 的单调性和 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t x(s) ds$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t y(s) ds$ 的连续性不难验证, 则式(1)的最优收获量为

$$Y^* = \frac{1}{2} \left(r_1 - \frac{\alpha_1^2}{2} \right) N_1 + \frac{1}{2} \left(r_2 - \frac{\alpha_2^2}{2} \right) N_2$$

3 数值模拟

利用数值模拟的方法展示前面章节所得到的结果, 并观察在引入最优收获时, 生物持续和灭绝的情况。根据文献[13]中 Milstein 的方法, 确定一些常量 $r_1 = 1, r_2 = 1.2, \varepsilon_1 = 0.7, \varepsilon_2 = 0.8, b_1 = 0.9, b_2 = 0.7, K_1 = K_2 = 2$ 以及 $f(y) = e^y, g(x) = e^x$, 且初值为 $X(0) = (0.6, 0.4)$ 。

图1表示了自然随机扰动条件下, 生物的生长情况, 其中 $\alpha_1 = 0.15, \alpha_2 = 0.18, q_1 = q_2 = 0$ 。图2模拟在和图1同等强度随机干扰的情况下, 施加最优收获效力后生物的生长变化, 即 $q_1 = 0.494, q_2 = 0.592$, 可以看到生物的数量明显下降了一个等级, 但却仍能持续存在。并且通过对比图1, 图2的生物数量变化, 可以发现 $x(t)$ 的数量从平均值为1下降到平均值为0.5左右, 大约下降了0.5, 而 $y(t)$ 则由1.1下降到了0.52, 大致下降了0.58。这与通过上一部分计算出来的最优收获效力 $q_1 = 0.494, q_2 = 0.592$ 的结论相一致, 并且算得最优收获 $Y(Q)$ 处于 $(0.52, 0.71)$ 之间。另外通过图1, 图3的对比发现在扰动强度很大的情况下, 即对于图3中 $\alpha_1 = 1.6,$

$\alpha_2 = 1.8$, 物种大概率会灭绝, 因此无法进行捕获, 这也验证了之前得到的结论。

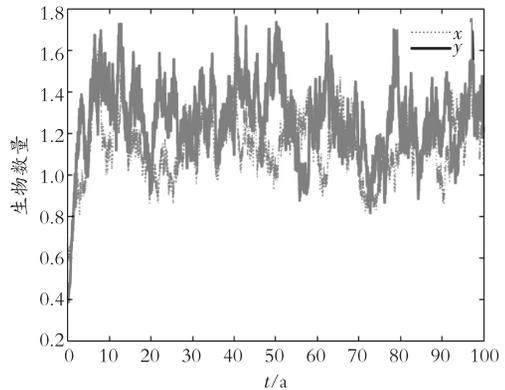


图1 随机扰动下无收获的生物数量图

Fig. 1 Biological quantity diagram under stochastic disturbances with no harvesting

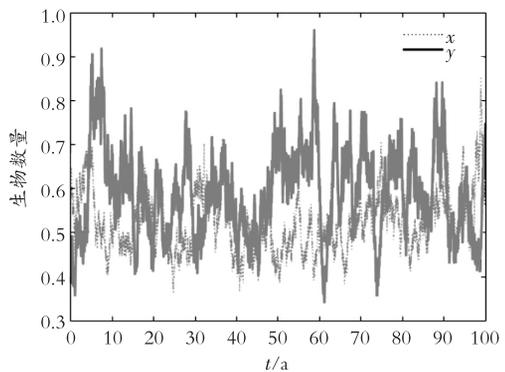


图2 随机扰动下施加收获的生物数量图

Fig. 2 Biological quantity diagram under stochastic disturbances with optimal harvesting efforts

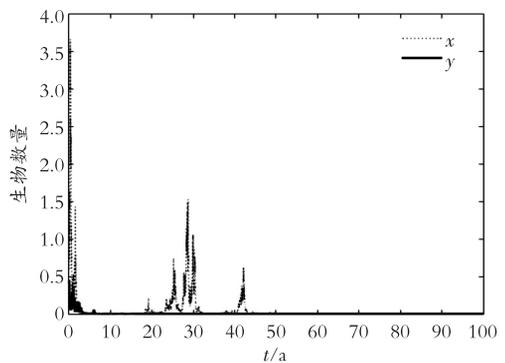


图3 强随机扰动下的生物数量图

Fig. 3 Biological quantity diagram under strong stochastic disturbances with harvesting

4 结束语

提出一类具有代表性的非线性生物互惠模型, 对其解的存在唯一性和遍历性进行说明, 给出了物种持续存在与灭绝的条件, 并且引入收获项展开对该系统最优收获问题的研究, 算出最优收获效力。虽然模型仍存在一点不足, 即由于模型的特性无法

算出最优收获的一个具体值,但是通过计算出最优收获的一个范围,也能合理控制收获量以确保物种不至于过度捕获而灭绝。

参考文献(References):

- [1] BEDDINGTON J R, MAY R M. Harvesting Natural Population in A Randomly Fluctuating Environment[J]. *Science*, 1977(197):463—465
- [2] LI W X, WANG K. Optimal Harvesting Policy for Stochastic Logistic Population Model [J]. *Appl Math Comput*, 2011(218):157—162
- [3] LIU G D, MENG X Z. Optimal Harvesting Strategy for a Stochastic Mutualism System in a Polluted Environment with Regime Switching[J]. *Physica A*, 2019(536):1—14
- [4] LIU M. Optimal Harvesting Policy for A Stochastic Predator-Prey Model with Time Delay [J]. *Appl Math Lett*, 2015(48):102—108
- [5] 凌亚茹.带周期系数的捕食-被捕食模型的相关性质[J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2019(6):23—28
- LING Y R. Relevant Properties of Predator-prey Model with Periodic Coefficients [J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2019, 36(6):23—28 (in Chinese)
- [6] LIU M, WANG K. Analysis of a Stochastic Autonomous Mutualism Model[J]. *J Math Anal Appl*, 2013(402):392—403
- [7] MAY R M. *Models of Two Interacting Populations in Theoretical Ecology: Principles and Application* [M]. Saunders, PA, Blackwell:Oxford, 1976
- [8] ZHAO Y, YUAN S L. Optimal Harvesting Policy of A Stochastic Two-Species Competitive Model of Lévy Noise in a Polluted Environment[J]. *Physica A*, 2017(477):20—33
- [9] JI C Y, JIANG D Q. Persistence and Non-Persistence of a Mutualism System with Stochastic Perturbation [J]. *Discret Contin Dynam Syst*, 2013(32):867—889
- [10] LI M, GAO J H, SUN C F, et al. Analysis of a Mutualism Model with Stochastic Perturbations[J]. *Int J Biomath*, 2015(8):1—18
- [11] LIU M, BAI C Z. Optimal Harvesting of A Stochastic Mutualism Model with Lévy Jumps [J]. *Commun Nonlinear Sci Numer Simul*, 2016(276):301—309
- [12] PRATO G D, ZABCZY K J, *Ergodicity for Infinite Dimensional Systems*[M]. Cambridge:Cambridge University Press, 1996
- [13] HIGHAM D J. *An Algorithmic Introduction to Numerical Simulation of Stochastic Differential Equations*[J]. *SIAM Rev*, 2001(43):525—546
- [14] MAO X R, *Stochastic Differential Equations and Applications*[M]. Horwood:Chichester, 1997

Ergodicity and Optimal Harvesting Policy for a Stochastic Mutualism Model

LUO Jun-wei

(School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

Abstract: The properties of a nonlinear mutualism model under stochastic perturbations are discussed along with the problem of the optimal harvesting strategy. In order to study the dynamic behaviors, the existence and uniqueness of positive solution to the model are proven by the comparison principle of stochastic equations, and the criteria for persistence in mean and extinction of two species are given. Finally, by using the aggregation and ergodic method, the explicit form of optimal harvesting policy is obtained, together with the numerical stimulation showing the growth situations of two species under exploitation, which not only help human beings take fully advantage of nature and gain maximum benefit, but maintain populations at a reasonable level, keep species from extinction, and guarantee the biodiversity.

Key words: optimal harvesting strategy; stochastic mutualism model; persistence and extinct; ergodicity; Itô formula

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

罗俊威.一类随机互惠模型的遍历性和最优收获策略[J]. *重庆工商大学学报(自然科学版)*, 2021, 38(4):68—72

LUO J W. Ergodicity and Optimal Harvesting Policy for a Stochastic Mutualism Model[J]. *Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition)*, 2021, 38(4):68—72