

饱和约束中立稳定多智能体系统有限时间 广义一致性研究*

袁艺云¹, 王 慧¹, 曹 瑞², 王 霞¹, 韩 琦^{3**}

(1. 重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331; 2. 重庆科技学院 电气工程学院, 重庆 401331;
3. 重庆科技学院 智能技术与工程学院, 重庆 401331)

摘 要:考虑系统有限时间稳定与执行器饱和的问题,针对具有输入饱和的中立稳定多智能体系统的有限时间广义一致问题,设计了二种分别适用于无领导者和领导-跟随情况下的分布式非光滑控制算法;该算法利用智能体间的局部通信,驱使智能体间达成有限时间广义一致;通过 Lyapunov 有限时间稳定理论、LaSalle 不变集原理、不等式放缩及矩阵知识得出了系统实现全局有限时间广义一致的充分条件和系统收敛时间的范围;通过研究发现:具有输入饱和的中立稳定多智能体系统的收敛时间与控制参数、智能体间的通信关系、广义映射函数及饱和上界有关;最后,通过数值仿真进一步验证了理论结果的正确性及有效性。

关键词:多智能体系统;中立稳定;饱和约束;有限时间广义一致

中图分类号: O231 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-058X(2021)04-0056-07

0 引 言

近年来,多智能体系统的协调控制受到了广大科研人员的关注^[1-3],特别是一致性问题。利用多智能体系统的一致性算法能解决智能电网的经济调度、动态负载平衡问题^[4]。在多智能体网络中,单个智能体通过某个协议与系统中的其他智能体达成共识,即智能体的状态收敛于相同的值^[5](一致值或群体决策值)。在目前的多智能体系统协调控制领域中,研究者大多采用分布式控制协议,因为相比于传统的集中式控制协议,分布式控制策略具有所用信息量少、协作性好、灵活性高等优点^[6]。

许多学者对多智能体系统的一致性进行了

研究,并进行了深入的讨论。文献[1]考虑如何提高智能体通信质量(降低通信量、提高通信信息利用率)的问题,设计了基于事件触发分布式控制协议;文献[3]研究了具有非线性动态和不确定扰动的多智能体系统一致性问题,设计了可以避免芝诺行为的分布式事件触发控制协议。但是多智能体系统在工业应用中却受到各种物理条件的限制,其中最常见的物理执行器具有饱和的特点(执行器工作范围的限制),比如电机的输出功率、转速等往往是有界的,若不考虑执行器饱和的特性,则可能会降低系统控制性能,从而导致系统不稳定。因此,考虑执行器饱和存在的情况十分必要。在文献[7]中,提出了饱和受限的中立稳定无领导者多智能体系统的一致性算法。

收稿日期:2020-05-24;修回日期:2020-09-11.

* 基金项目:重庆市教育委员会科学技术研究项目(KJZD-K201901504, KJQN201901537);教育部人文社会科学研究项目资助(19YJCZH047).

作者简介:袁艺云(1993—),女,四川内江人,硕士研究生,从事多智能体一致性研究.

** 通讯作者:韩琦(1981—),男,山西晋中人,副教授,博士,从事人工智能研究. Email: hanqicq@163.com.

在多智能体分布式控制中,高精度是评价一致性好坏的重要标准之一。在实际应用中,很多控制精度较高的系统,往往需要系统收敛的时间很短,这就导致了对有限时间一致性的探索。有限时间一致性是指各智能体在有限的时间内达到一个共同的状态。基于文献[7]、文献[8]设计了饱和受限的中立稳定多智能体系统有限时间一致性算法。这里不仅考虑了无领导者在无向拓扑图下的有限时间一致性问题,还考虑了领导-跟随多智能体系统在有向拓扑图下的有限时间一致性问题。

以上文献考虑的是多智能体系统完全一致性问题,实际上同步问题可以分为完全同步、广义同步和滞后同步^[9]。广义同步即是在响应系统与驱动系统间建立一个函数关系。相比完全同步,广义同步具有更多的应用^[10],如混沌系统的保密通信等。

基于上述文献的启发,考虑多智能体系统有限时间广义一致性问题是具有意义的。一方面,关于有限时间一致性的研究中饱和和约束很少被考虑,另外一方面,目前很少有多智能体系统的有限时间广义一致的结果。本文的主要贡献如下:

1) 考虑了输入饱和约束的中立稳定多智能体系统的有限时间广义一致问题,相比较于文献[8],将完全一致问题转化为广义一致问题,丰富了文献[8]的研究。

2) 针对无领导者和领导-跟随二种情况提出了非光滑控制算法,并通过有限时间 Lyapunov 稳定理论、LaSalle 不变集原理和不等式放缩、图论知识证明了在该控制算法下能实现有限时间广义一致,并得到了二种情况下的系统收敛时间的范围。

1 预备知识

1.1 符号说明

$\mathbf{R}^{N \times N}$ 是 $N \times N$ 维的实数矩阵, \mathbf{I}_N 代表 $N \times N$ 维的单位矩阵, $\mathbf{1}_N$ 代表由 N 个 1 组成的 N 维列向量, Re 代表实部。给定一个矩阵 \mathbf{A} , \mathbf{A}^T 代表它的转置; $\text{rank}(\mathbf{A})$ 表示矩阵 \mathbf{A} 的秩; $\|\mathbf{A}\|$ 代表 \mathbf{A} 的范数; \otimes 代表克罗内克积; $\mathbf{D} = \text{diag}(A_1, A_2, \dots, A_N)$ 是准对角矩阵; 定义 $\text{sig}(v)^\alpha = \text{sign}(v) |v|^\alpha$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$, $\text{sign}(v)$ 是一个符号函数, 且满足 $\frac{d}{dv} |v|^{\alpha+1} = (\alpha+1)$

$\text{sig}(v)^\alpha, \frac{d}{dv} \text{sig}(v)^{\alpha+1} = (\alpha+1) |v|^\alpha$; $\delta_\mu: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 被定义为 $\delta_\mu(v) = \text{sign}(v) \cdot \min\{|v|, \mu\}$, 其中 μ 是饱和上界。为了简化公式表达, 引入以下符号:

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}| &= [|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|]^T \\ |\mathbf{x}|^\alpha &= [|x_1|^\alpha, |x_2|^\alpha, \dots, |x_n|^\alpha]^T \\ \text{sig}(\mathbf{x})^\alpha &= [\text{sig}(x_1)^\alpha, \dots, \text{sig}(x_n)^\alpha]^T \\ \delta_\mu(\mathbf{x}) &= [\delta_\mu(x_1), \delta_\mu(x_2), \dots, \delta_\mu(x_n)]^T \\ \mathbf{h}(x_i) &= [h(x_{i1}), h(x_{i2}), \dots, h(x_{in})]^T \end{aligned}$$

1.2 图论知识

拥有 N 个智能体的多智能体系统可以用无向图 $G=(V, E, \mathbf{A})$ 来表示, 其中 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_N\}$ 表示节点的集合, $E = V \times V$ 表示边的集合, $\mathbf{A} = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 表示邻接矩阵。如果 $(j, i) \in E$, 则 $a_{ij} > 0$, 否则 $a_{ij} = 0$ 。本文中, 假设 $a_{ij} = a_{ji}$ 且 $a_{ii} = 0$; $N_i = \{j \in V: (j, i) \in E\}$ 是图 G 中节点 i 的邻居所组成的集合。 $\mathbf{L} = (l_{ij})_{N \times N}$ 是图的拉普拉斯矩阵, 且当 $i \neq j$ 时, $l_{ij} = -a_{ij}$; 当 $i = j$ 时,

$$l_{ii} = \sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}。$$

1.3 问题描述

考虑带有 N 个节点的中立稳定多智能体系统:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{A}\mathbf{x}_i + \mathbf{B}\delta_\mu(\mathbf{u}_i), i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

其中 $\mathbf{x}_i \in \mathbf{R}^n$ 代表第 i 个智能体的状态, $\mathbf{u}_i \in \mathbf{R}^m$ 代表第 i 个智能体的理想输入信号。

注 1 由于式(1)是中立稳定的, 因此所有 \mathbf{A} 的特征值满足 $\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$, 且 $\text{Re}(\lambda_i) = 0$ 时, 其几何重数等于代数重数。

定义 1 如果对于任何初始状态, 存在标量 $T > 0$, 使得 $\lim_{t \rightarrow T} \|\mathbf{h}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)\| = 0$ 且 $t > T, \mathbf{h}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{h}(\mathbf{x}_j)$, 则式(1)能达到有限时间广义一致。

如果 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{P}\mathbf{x}_i + \mathbf{Q}$, 其中 $\mathbf{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}, \mathbf{Q} \in \mathbf{R}^n$, 则称式(1)能实现线性广义一致。

在给出主要结果之前, 给出了一些假设和引理。

假设 1 拓扑图是可连通的。

引理 1^[8] 令 $v_i \in \mathbf{R}, v_i > 0, 0 < p < 1, i=1, 2, \dots, n$, 有

$$\left(\sum_{i=1}^n v_i\right)^p \leq \sum_{i=1}^n v_i^p$$

引理 2^[8] 假设 $\mathbf{x} = 0$ 是 $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$ 的平衡点且 $U \subset \mathbf{R}^n$ 是包含 $\mathbf{x} = 0$ 的领域, 如果存在连续可微的函数 $V: U \rightarrow \mathbf{R}$ 满足:

(1) V 正定。

(2) 存在 $c>0, \alpha \in (0, 1)$, 存在开邻域 $U_0 \subset U$

使得 $\dot{V} + cV^\alpha \leq 0, x \in U_0 \setminus \{0\}$ 。

则系统能达到有限时间稳定, 而且 $U_0 = U = \mathbf{R}^n$ 以及 $V(x)$ 是径向无界的函数, 则系统能达到全局有限时间稳定。

2 主要结果

2.1 无领导者情形

在本节中, 提出了一个分布式一致性算法来解决无向图下无领导者多智能体系统的有限时间广义一致性问题。

对于式(1), 存在一个非奇异线性变换 $x_i = Wz_i$, 使得系统式(1)变成如下形式:

$$\dot{z}_i = \tilde{A}z_i + \tilde{B}\delta_\mu(u_i) \quad (2)$$

其中: $\tilde{A} = W^{-1}AW = \text{diag}\{A_c, A_s\}$, $A_c \in \mathbf{R}^{n_1 \times n_1}$ 是反对称矩阵, 即 $A_c + A_c^T = 0$, $A_s \in \mathbf{R}^{n_2 \times n_2}$ 是赫尔维茨矩阵; $\tilde{B} = W^{-1}B = [B_c^T; B_s^T]^T$, 其中 $B_c \in \mathbf{R}^{n_1 \times m}$, $B_s \in \mathbf{R}^{n_2 \times m}$, $z_i = [z_{ic}^T; z_{is}^T]^T$ 。

有限时间广义一致控制算法设计如下:

$$u_i = -\delta_\mu(\text{sig}((P_1PW\tilde{B})^T \sum_{j=1}^N a_{ij}(h(x_i) - h(x_j))))^\alpha \quad (3)$$

其中: $\alpha \in (0, 1)$, $h(x_i) = Px_i + Q$, P_1 是正定矩阵。

定理 1 对于在无向拓扑下具有 N 个节点的无领导者的多智能体系统式(1), 当满足以下 3 个条件时, 有

$$(PW)^T P_1(PW) = \text{diag}\{I_c, P_3\} \quad (4)$$

$$P_3A_s + A_s^T P_3 < 0 \quad (5)$$

$$\text{rank}(P_1PW\tilde{B})^T = n \quad (6)$$

在控制算法式(3)下, 式(1)可实现全局有限时间广义一致。

证明 考虑如下的 Lyapunov 函数:

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (h(x_i) - h(x_j))^T P_1 (h(x_i) - h(x_j)) \quad (7)$$

容易得到 V 是径向无界的函数, 将式(7)对时间求导可得

$$\dot{V} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i - z_j)^T (PW)^T P_1 (PW) (\tilde{A}(z_i - z_j)) +$$

$$2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i - z_j)^T (PW)^T P_1 (PW) (\tilde{B}(\delta_\mu(u_i))) \quad (8)$$

根据式(4), 式(8)的第一项可变为

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i - z_j)^T (PW)^T P_1 (PW) (\tilde{A}(z_i - z_j)) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_{ic} - z_{jc})^T (A_c + A_c^T) (z_{ic} - z_{jc}) + \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_{is} - z_{js})^T (P_3A_s + A_s^T P_3) (z_{is} - z_{js}) = \\ & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_{is} - z_{js})^T (P_3A_s + A_s^T P_3) (z_{is} - z_{js}) < 0 \end{aligned}$$

根据式(5)可以得到最后一个不等式。

式(8)的第二项, 可化为

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_{ij} (z_i - z_j)^T (PW)^T P_1 (PW) (\tilde{B}(\delta_\mu(u_i))) = \\ & - 2 \sum_{i=1}^N ((P_1PW\tilde{B})^T \sum_{j=1}^N a_{ij} (h(x_i) - h(x_j)))^T \times \\ & (\delta_\mu(\text{sig}(P_1PW\tilde{B})^T \sum_{j=1}^N a_{ij} (h(x_i) - h(x_j)))) \leq 0 \end{aligned}$$

因为对 $\forall \varepsilon \in \mathbf{R}$, 有 $\varepsilon \delta_\mu(\varepsilon) \geq 0$, 所以最后一步

成立。因此 $\dot{V} = 0$, 当且仅当 $\sum_{j=1}^N a_{ij} (P_1PW\tilde{B})^T (h(x_i) - h(x_j)) = 0$ 。由于式(6)成立, 即 $h(x_i) = h(x_j)$, 显然, 式(2)实现了广义一致, 由 LaSalle 不变集原理知道, 式(2)是渐近稳定的。

接下来, 证明式(2)会在有限时间内收敛。当式(2)饱和未发生时, 有

$$\| (P_1PW\tilde{B})^T (h(x_i) - h(x_j)) \| < \mu^{\frac{1}{\alpha}}$$

注意到

$$\begin{aligned} \dot{V} & \leq - 2 \sum_{i=1}^N \gamma_i^T \text{sig}(\gamma_i)^\alpha = \\ & - 2 \sum_{i=1}^N |\gamma_i|^T |\gamma_i|^\alpha = \\ & - 2 \sum_{i=1}^{Nn} |\hat{\gamma}_i|^{\alpha+1} \end{aligned}$$

其中: $\gamma_i = (P_1PW\tilde{B})^T (h(x_i) - h(x_j))$, $\gamma = [\gamma_1^T, \gamma_2^T, \dots, \gamma_N^T]^T$, 也可表述为 $\gamma = [\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_{Nn}]^T$, $\hat{\gamma}_i \in \mathbf{R}$ 。

令误差 $e_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (h(x_i) - h(x_j))$, 那么 $e = (L \otimes P) x$, 从而 $\gamma^T \gamma = e^T ((L^T L) \otimes (P_1PW\tilde{B})^T (PW\tilde{B})^T P_1)$ 。由于 V 是连续函数, 因此在达到一致

之前, $\gamma \neq 0$ 。假设 $\gamma \neq 0$ 且令 $\Theta = \{\xi \in R^{N \times n} : \xi^T \xi = 1\}$ 。值得注意的是, 当 $\bar{T} < T$ 时, $\eta_1 = \min_{e \in \Theta, t \in [0, T]} \gamma^T \gamma > 0$, 因此, $\gamma^T \gamma \geq \eta_1 e^T e$ 。

结合式(7)可以得到:

$$\begin{aligned} V &= e^T (L \otimes P_1) e \leq \\ \lambda_{\max}(L \otimes P_1) e^T e &\leq \\ \eta_1^{-1} \|L \otimes P_1\| \gamma^T \gamma &= \\ \eta_1^{-1} \|L \otimes P_1\| \sum_{i=1}^{Nn} |\hat{\gamma}_i|^2 & \end{aligned}$$

通过式(7)及引理1,有

$$\begin{aligned} V^{\frac{\alpha+1}{2}} &\leq (\eta_1^{-1} \|L \otimes P_1\| \sum_{i=1}^{Nn} |\hat{\gamma}_i|^2)^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq \\ (\eta_1^{-1} \|L \otimes P_1\|)^{\frac{\alpha+1}{2}} \sum_{i=1}^{Nn} |\hat{\gamma}_i|^{\alpha+1} & \end{aligned}$$

令 $\tau = 2(\eta_1^{-1} \|L \otimes P_1\|)^{-\frac{\alpha+1}{2}} > 0$, 有 $\dot{V} + \tau V^{\frac{\alpha+1}{2}} < 0$ 。

由引理2可知式(2)可实现有限时间全局广义一致。从而根据 $V^{\frac{1-\alpha}{2}} \leq V(t_0)^{\frac{1-\alpha}{2}} - \tau \frac{1-\alpha}{2} (t-t_0)$, 得到当 $t > t^* = \frac{2}{\tau(1-\alpha)} \left(V(t_0)^{\frac{1-\alpha}{2}} + \tau \frac{1-\alpha}{2} t_0 \right)$, 误差 $e_i = \sum_{j \in N_i} a_{ij} (h(x_i) - h(x_j))$ 最终会收敛到0。因此无领导者的多智能体式(2)在式(4)一式(6)满足时, 利用设计的控制算法式(3)可以实现有限时间广义一致。间接证明无领导多智能体式(1)在式(4)一式(6)成立时, 控制算法式(3)可以实现有限时间广义一致。

注2 如果 $P=I$, 则控制算法式(3)可以解决系统式(1)在无向图下的有限时间一致性问题。

2.2 领导者-跟随者情形

考虑一个由标记为0到 $N-1$ 的智能体组成的多智能体系统, 其中0是领导者, 其余都是跟随者。

根据假设1, 定义拓扑图的拉普拉斯矩阵为 $L = \begin{bmatrix} 0 & L_2 \\ L_2 & L_1 \end{bmatrix}$, 其中 L_1 是可逆的。

对于系统式(1), 存在非奇异的线性变换 $z_i = W^{-1}(x_i - x_0)$, $i=1, 2, \dots, N-1$, 使得系统式(1)化为

$$\begin{cases} \dot{z}_0 = \tilde{A}z_0 + \tilde{B}u_0 \\ \dot{z}_i = \tilde{A}z_i + \tilde{B}(\delta_\mu(u_i) - \delta_\mu(u_0)), i=1, 2, \dots, N-1 \end{cases} \quad (9)$$

其中: \tilde{A}, \tilde{B} 和式(2)中的定义相同, u_0 是领导者的输入, 满足 $\|u_0\| \leq \kappa \mu$ 。

对跟随者 $i=1, 2, \dots, N-1$, 设计如下的控制算法:

$$u_i = -\delta_\Delta(\text{sig}((P_1 P W \tilde{B})^T \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} (h(x_i) - h(x_j))))^\alpha + u_0 \quad (10)$$

其中: $\Delta + \kappa \leq \mu$ 。因此满足 $\|u_i\| \leq \mu$, 系统式(9)可表述为下面的通式:

$$\dot{z}_m = (I_{N-1} \otimes \tilde{A}) z_m + (I_{N-1} \otimes \tilde{B}) u$$

其中: $u = [(u_1 - u_0)^T, \dots, (u_{N-1} - u_0)^T]^T$, $z_m = [z_1^T, \dots, z_{N-1}^T]^T$ 。

定理2 在无向拓扑下具有 N 个智能体的领导-跟踪多智能体系统式(9), 当满足以下条件时:

$$\tilde{A} P W = P W \tilde{A} \quad (11)$$

$$P_1 \tilde{A} = \begin{pmatrix} A_c \\ P_3 A_s \end{pmatrix} \quad (12)$$

所设计的算法式(10)可以实现全局有限时间广义一致。

证明 令误差 $e_i = \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} (h(x_i) - h(x_j))$, $i=1, \dots, N-1$, $e = [y_1^T, y_2^T, \dots, y_{N-1}^T]^T$, 则

$$e = (L_1 \otimes P W) z_m$$

由于条件式(11)是成立的, 因此对时间求导可得:

$$\dot{e} = (I_{N-1} \otimes \tilde{A}) e + (L_1 \otimes \tilde{B}) u$$

结合式(10), 有

$$U = -\delta_\Delta(\text{sig}((I_{N-1} \otimes (P_1 P W \tilde{B})^T) e)^\alpha)$$

选取 Lyapunov 函数

$$V = e^T (L_1^{-1} \otimes P_1) e$$

对时间求导可得:

$$\dot{V} = 2e^T (L_1^{-1} \otimes P_1 \tilde{A}) e + 2e^T (I_{N-1} \otimes (P_1 P W \tilde{B})) \delta_\Delta(U)$$

由于条件式(12)成立, 可化为

$$\begin{aligned} \dot{V} &= e_s^T (L_1^{-1} \otimes (P_3 \tilde{A}_s + \tilde{A}_s^T P_3)) e_s - \\ &2((I_{N-1} \otimes (P_1 P W \tilde{B})^T) e)^T \times \\ &\delta_\Delta(\text{sig}((I_{N-1} \otimes (P_1 P W \tilde{B})^T) e)^\alpha) \leq 0 \end{aligned}$$

由此可以得到 $\dot{V} = 0$, 当且仅当 $e = 0$, 即 $h(x_i) = h(x_0)$, 领导-跟随多智能体系统式(9)实现了广义一致。由 LaSalle 不变集原理知道, 领导-跟随多智能体系统(9)是渐近稳定的。

接下来将证明系统有限时间收敛。当饱和未发

生时,有:

$$\| (P_1 P W \tilde{B})^T \sum_{j=0}^{N-1} a_{ij} (h(x_i) - h(x_j)) \| < \Delta^{\frac{1}{\alpha}}$$

那么

$$\dot{V} \leq -2 \tilde{e}^T \text{sig}(\tilde{e})^\alpha = -2 \sum_{i=1}^{(N-1)n} |\hat{e}_i|^{\alpha+1}$$

其中: $\tilde{e} = (I_{N-1} \otimes (P_1 P W \tilde{B})^T) e$, 令 $\tilde{e} = [\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{(N-1)n}]^T$, $\hat{e}_i \in \mathbf{R}$ 且 $\tilde{e}^T \tilde{e} \geq \eta_2 e^T e$, $\eta_2 = \min_{e \in \Theta} \tilde{e}^T \tilde{e}$, 因此

$$V = e^T (L_1^{-1} \otimes P_1) e \leq \lambda_{\max}(L_1^{-1} \otimes P_1) e^T e \leq$$

$$\left(\frac{\lambda_{\max}(L_1^{-1} \otimes P_1)}{\eta_2} \right) \sum_{i=1}^{(N-1)n} |\hat{e}_i|^2$$

从而得到:

$$V^{\frac{\alpha+1}{2}} \leq \left(\frac{\lambda_{\max}(L_1^{-1} \otimes P_1)}{\eta_2} \right)^{\frac{\alpha+1}{2}} \sum_{i=1}^{(N-1)n} |\hat{e}_i|^{\alpha+1}$$

$$\text{令 } \tau = 2 \left(\frac{\lambda_{\max}(L_1^{-1} \otimes P_1)}{\eta_2} \right)^{\frac{-(\alpha+1)}{2}} > 0, \text{ 有 } \dot{V} + \tau V^{\frac{\alpha+1}{2}} <$$

0, 根据引理 2 可知, 当 $t > t^* = \frac{2}{\tau(1-\alpha)}$

$\left(V(t_0)^{\frac{1-\alpha}{2}} + \tau \frac{1-\alpha}{2} t_0 \right)$ 时, 系统式(9)可以实现有限时间全局广义一致, 则原系统式(1)也可以实现有限时间广义一致。

3 数值仿真

在这节中, 给出两个例子来验证上述理论结果的正确性和有效性。

例 1 考虑无领导者的多智能体系统, 其拓扑图如图 1 所示, 显然假设 1 是满足的, 系统式(1)的动态方程为 $\dot{x}_i = Ax_i + B\delta_\mu(u_i)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 5 & -5 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

因为 A 的特征值为 2i, -2i, 所以系统式(1)是

中立稳定的, 选择非奇异矩阵 $W = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, 则

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ 选择 } P = W^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}, P_1 = P_3 = I_3, \text{ 显然式(4)一式(6)}$$

是满足的。给定饱和上界 $\mu = 2$, 控制参数 $\alpha = 0.6$, 图 2 给出了误差 e_i 随时间的变化, 可以看出误差最终是趋于 0 的, 由定义 1 可知无领导者多智能体系统式(1)实现了有限时间广义一致。

例 2 考虑一个领导-跟随多智能体系统式(1), 拓扑图如图 3 所示, 显然假设 1 是满足的。图 3 的

$$\text{拉普拉斯矩阵为 } L = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{其中, } L_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, L_1 \text{ 的特征值为 } 0.1864,$$

2.4707, 4.0000, 4.3429, 表明 L_1 是可逆的。系统的动态为 $\dot{x}_i = Ax_i + B\delta_\mu(u_i)$, 其中

$$A = \begin{bmatrix} -0.4000 & 0.5333 & -1.3333 \\ -0.2667 & 0.1333 & -1.3333 \\ 0.1333 & 0.2667 & -0.6667 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

$$\text{选择非奇异矩阵 } W = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 使得 } \tilde{A} =$$

$$\begin{bmatrix} -0.4 & 0.8 & 0 \\ -0.8 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0 & -0.1 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

由于 A 的特征值为 $-0.3218 + 0.7141i, -0.2897, -0.3218 - 0.7141i$, 则系统式(1)是中立稳定的。

$$\text{选择 } P_1 = I_3, P = \begin{bmatrix} -0.833 & 0.667 & 0.333 \\ 0 & -0.5 & 1 \\ 3.33 & -6.667 & -3.33 \end{bmatrix},$$

容易得到式(11)(12)是成立的, 给定饱和上界 $\mu = 4$, 控制参数 $\Delta = 3, \alpha = 0.6$, 给出领导者的控制 $u_1 = \sin t$, 图 4 给出了误差 e_i 随时间的变化, 领导-跟随多智能体系统式(1)最终能实现有限时间广义一致。

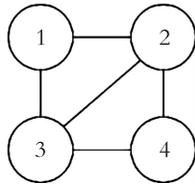


图1 无领导者情形下的拓扑图

Fig. 1 Communication topology without leader

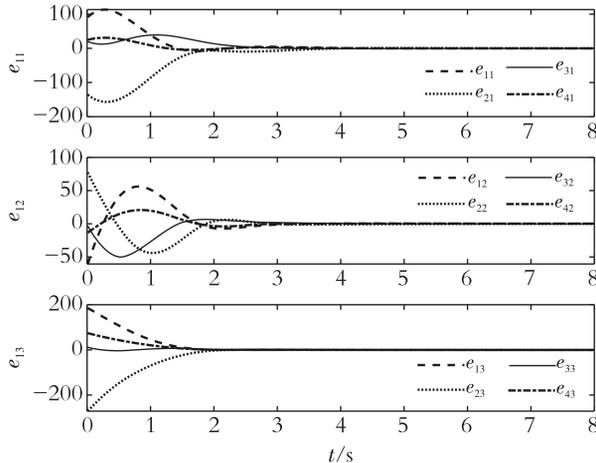


图2 无领导者系统的误差 e_i 演化图

Fig. 2 Error variation of e_i in the case of leaderless

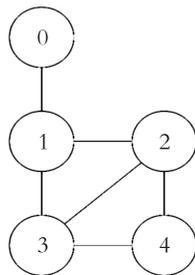


图3 领导-跟随者系统的通信拓扑图

Fig. 3 Communication topology of leader-following system

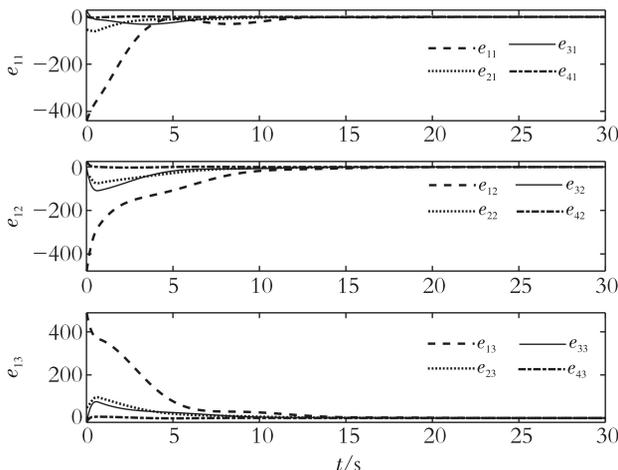


图4 领导-跟随者系统的误差 e_i 演化图

Fig. 4 Error variation of e_i about the leader-following system

4 结论

研究了饱和受限的中立稳定多智能体系统的有限时间广义一致性问题。对于无领导者和领导-跟随两种情形,分别设计了相应的非光滑分布式控制算法,以实现无向拓扑图下的有限时间广义一致。通过有限时间 Lyapunov 稳定理论、不等式放缩、图论知识及 LaSalle 不变集原理证明了无领导者多智能体系统在式(4)一式(6)满足的情况下,所提出的控制算法式(3)能实现有限时间广义一致。在领导-跟随情况下,运用跟无领导情形下相同的分析方法证明了在式(11)(12)下,领导-跟随多智能体系统在控制算法式(10)下能实现有限时间广义一致,并且结合有限时间 Lyapunov 稳定理论和不等式放缩技巧,得出当时间 $t > t^* = \frac{2}{\tau(1-\alpha)} \left(V(t_0)^{\frac{1-\alpha}{2}} + \tau \frac{1-\alpha}{2} t_0 \right)$ 时,系统会收敛。由此可知,系统收敛时间与控制参数、智能体间的通信关系、广义映射函数及饱和上界有关。最后,通过数值仿真验证了理论结果的正确性。

参考文献 (References):

[1] DING L, HAN Q L, GE X, et al. An Overview of Recent Advances in Event-triggered Consensus of Multiagent Systems[J]. IEEE Transactions on Cybernetics, 2018, 48(4):1110—1123

[2] ZHAO J, LIU G P. Time-variant Consensus Tracking Control for Networked Planar Multi-agent Systems with Non-Holonomic Constraints [J]. Journal of Systems Science & Complexity, 2018, 31(2):396—418

[3] LIU J, YU Y, SUN J, et al. Distributed Event-triggered Fixed-time Consensus for Leader-follower Multi-agent Systems with Nonlinear Dynamics and Uncertain Disturbances [J]. International Journal of Robust & Nonlinear Control, 2018, 28(11):3543—3559

[4] 谢洋, 王慧, 陈国荣, 等. 分布式优化在智能电网经济调度问题中的应用[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020, 37(2):42—47

XIE Y, WANG H, CHEN G R, et al. Application of Distributed Optimization Method to Economic Dispatch in Smart Grid [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(2):42—47 (in Chinese)

[5] 龙慧, 樊晓平, 刘少强. 多智能体系统分布式一致性算法研究现状[J]. 计算机工程与应用, 2013, 49(1):

- 36—42
LONG H, FAN X P, LIU S Q. Research Status of Distributed Consensus Algorithm for Multi-agent Systems[J]. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(1):36—42(in Chinese)
- [6] 王玉娟. 多智能体系统(给定)有限时间控制问题研究[D]. 重庆:重庆大学, 2016
WANG Y J. Research on (Given) Finite-time Control of Multi-agent Systems[D]. Chongqing:Chongqing University, 2016(in Chinese)
- [7] YANG T, MENG Z Y, DIMAROGONAS D V, et al. Global Consensus for Discrete-time Multi-agent Systems with Input Saturation Constraints[J]. Automatica, 2014, 50(2):499—506
- [8] ZHANG Z, ZUO Z, WANG Y. Finite-time Consensus of Neutrally Stable Multi-agent Systems in the Presence of Input Saturation[J]. Journal of the Franklin Institute, 2019, 356(2):894—907
- [9] PECORA L M, CARROLL T L. Synchronization in Chaotic Systems [J]. Physical Review Letters, 1996, 64(8):821—824
- [10] YANG S S, DUAN C K. Generalized Synchronization in Chaotic Systems[J]. Chaos Solitons & Fractals, 1998, 9(10):1703—1707

Finite-time Generalized Consensus of Neutrally Stable Multi-agent Systems with Input Saturation Constraints

YUAN Yi-yun¹, WANG Hui¹, CAO Rui², WANG Xia¹, HAN Qi^{3* * *}

(1. School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;

2. School of Electrical Engineering, Chongqing University of Science and Technology,

Chongqing 401331, China; 3. School of Intelligent Technology and Engineering, Chongqing University

of Science and Technology, Chongqing 401331, China)

Abstract: Considering the finite-time stability and actuator saturation of the system, two distributed non-smooth control algorithms are designed for the finite-time generalized consensus problem of neutral stable multi-agent system with input saturation under the situation of leaderless and leader following respectively. The algorithm uses local communication between agents to drive agents to reach finite-time generalized consensus. Based on Lyapunov finite-time stability theory, LaSalle invariant set principle, inequality expansion and reduction and matrix knowledge, the sufficient conditions for the multi-agent system to achieve global finite-time generalized consensus and the range of system convergence time are obtained. It is found that the convergence time of the neutral stable multi-agent system with input saturation is related to the control parameters, the communication relationship between agents, the generalized mapping function and the upper bound of saturation function. Finally, numerical simulations verify the correctness and validity of the theoretical results.

Key words: multi-agent system; neutrally stable; saturation constraint; finite-time generalized consensus

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

袁艺云,王慧,曹瑞,等. 饱和约束中立稳定多智能体系统有限时间广义一致性研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021, 38(4):56—62

YUAN Y Y, WANG H, CAO R, et al. Finite-time Generalized Consensus of Neutrally Stable Multi-agent Systems with Input Saturation Constraints[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(4): 56—62