

# 基于到达时间差的曲线交叉点测向算法研究\*

刘青琨, 孙广慧, 崔逊学

(安徽理工大学 电气与信息工程学院, 安徽 淮南 232001)

**摘要:**针对传统的基于到达时间差的曲线交叉点测向精度不高、权值确定困难的问题,提出一种采用旋转坐标系求出交叉点,根据几何精度因子 GDOP 来加权不同交叉点参量的方法;通过坐标系旋转,获得两个非线性方程关于两个未知变量的解析解,即方位角和俯仰角,改善了曲线交叉点测向精度不高的问题;与传统的加权方法相比,采用 GDOP 指标综合加权估计的 WI 法对目标位置的估计更加准确;仿真验证了采用 3 种不同加权方式下算法的性能,根据实验结果得出:采用综合加权估计的 WI 法更能接近克拉美罗下界,提高了对交叉点估计的精度,具有较高的定位性能。

**关键词:**到达时间差;测向;旋转坐标系;权重;克拉美罗下界

**中图分类号:**TN92      **文献标志码:**A      **文章编号:**1672-058X(2021)04-0010-05

## 0 引言

信号源目标定位通过利用一些已知位置的基站或传感器以及测得的信号特征值来求解目标所在的位置。信号源目标定位通过测量信号到达基站或传感器的到达时间(Time of Arrival, TOA)、到达时间差(Time Difference of Arrival, TDOA)、入射角(Angle of Arrival, AOA)等参数,再根据相关的定位算法来估计目标的位置<sup>[1]</sup>。在各种定位技术中,TDOA 技术有着较好的定位性能,得到了研究人员的重视<sup>[2]</sup>。

基于到达时间差的 TDOA 测量方程中曲线交叉点参量的计算<sup>[3]</sup>是两个非线性方程求解未知变量的重要问题。文献[4]中,作者提出了一种思想,对于 TDOA 双曲线解析方程,从笛卡尔坐标系变换到极坐标系,并通过极向旋转的方法计算出两条双曲线交叉点的位置参量;文献[5]假定已知三维空间中信源的高度,使得目标位置限定在双曲线上,且将

TDOA 双曲线简化为一条相切的直线,由此确定两条相切直线的交点,作为 TDOA 双曲线交叉点的近似位置。这些方法虽然在一定程度上可以对交叉点进行求解,但是计算的过程较为繁琐,计算量也比较大,对交叉点的估计精度不高。计算出 TDOA 曲线交叉点参量后,接着就要研究如何确定权值与组合。文献[6]提出每 3 个传感器构成一组,根据各传感器至目标的高度差以及测量的 TDOA,先估计出目标的二维坐标,然后计算各组传感器与初步估计的目标坐标构成的几何位置关系形成的 CRLB,以此作为权重计算出目标位置。但是这些方法并不能合理的确定交叉点的权值,因此,对目标位置的估计并不理想。

针对传统的基于到达时间差的曲线交叉点测向精度不高、权值确定困难的问题,提出一种采用旋转坐标系求出交叉点,根据几何精度因子 GDOP 来加权不同交叉点参量的方法。从而改善了 TDOA 曲线交叉点计算过程繁琐,对交叉点的估计精度不高的问题。采用 GDOP 指标对各交叉点参量取权重综

收稿日期:2020-07-05;修回日期:2020-09-01.

\* 基金项目:国家自然科学基金资助(61672532).

作者简介:刘青琨(1993—),男,安徽淮北人,硕士研究生,从事阵列信号处理研究.

合,很大程度提高了对目标位置的定位精度。

## 1 到达时间差原理

图1为TDOA的测向原理图,设定位系统共有 $N$ 号传感器参与定位,其坐标为 $s_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ ,接收到的信号传播时间为 $t_i$ 。将距离信号源近的设为参考传感器,同时将它的位置设为坐标原点,即 $s_0 = [x_0, y_0, z_0]^T$ 。在以参考传感器为原点,半径为30 m的圆内放置其他的传感器<sup>[7]</sup>。

设 $s$ 为去除参考传感器后,其他传感器组成的矩阵 $s = [s_1, s_2, \dots, s_{N-1}]^T$ ,到达时间差向量 $\tau = [\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{N-1}]^T$ ,其中 $\tau_i = t_i - t_0$ 。信号源真实的位置坐标 $\gamma = [\varphi, \theta]^T$ , $\varphi$ 为信号源的方位角, $\theta$ 为信号源的俯仰角。

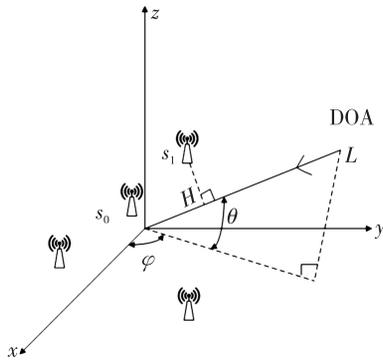


图1 传感器测向原理图

Fig. 1 Schematic diagram of sensor direction finding

$L$ 为信号传播方向的一点,到基准传感器 $s_0$ 的距离约为1 km。传感器 $s_i$ 向 $s_0L$ 作垂线,交点为 $H$ 。则有 $s_0H$ 长度 $c\tau_i$ 等于 $s_i$ 在 $s_0L$ 上的投影, $c$ 为波速。即有如下的TDOA关系:

$$c\tau_i = s_i k$$

其中 $k$ 为信号的方向<sup>[8]</sup>矢量。

$$k = \begin{bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

写成矩阵方程形式:

$$\tau = \frac{sk}{c}$$

假定 $n = [n_1, n_2, \dots, n_{N-1}]^T$ 为TDOA测量噪声矢量,有

$$\hat{\tau} = \tau + n$$

TDOA的协方差矩阵如下:

$$Cov(\hat{\tau}) = E(\hat{\tau}\hat{\tau}^T) - E(\hat{\tau})E(\hat{\tau}^T)$$

运用最小二乘法来进行计算,则目标函数可表示为

$$\hat{k} = \text{Arg min}_k \left\{ \left[ \hat{\tau} - \frac{sk}{c} \right]^T Cov(\hat{\tau})^{-1} \left[ \hat{\tau} - \frac{sk}{c} \right] \right\}$$

根据最小二乘原理, $W = Cov^{-1}(n)$ 为协方差矩阵求逆<sup>[9]</sup>,获得以下的结果:

$$\hat{k} = c(S^T WS)^{-1} S^T W \tau$$

## 2 交叉点算法原理

### 2.1 TDOA曲线交叉点算法

假设TDOA测量基准传感点位于坐标轴原点,第 $i, j$ 号传感点是不属于基准的其他两个传感点,其位置分别为 $s_i = [x_i, y_i, z_i]^T$ 和 $s_j = [x_j, y_j, z_j]^T$ 。旋转坐标轴的方法如图2所示。

(1) 旋转过程中坐标原点 $o$ 保持不动,原 $x$ 轴旋转后形成的 $x'$ 轴,指向并通过坐标 $s_i$ 。

(2) 在以 $o, s_i, s_j$ 等3点构成的平面上,在垂直于 $x'$ 轴的直线上过 $o$ 点,按右手系确定 $y'$ 轴的正向。

(3) 在 $x'oy'$ 平面过 $o$ 点的垂直线上,按右手系确定 $z'$ 轴。

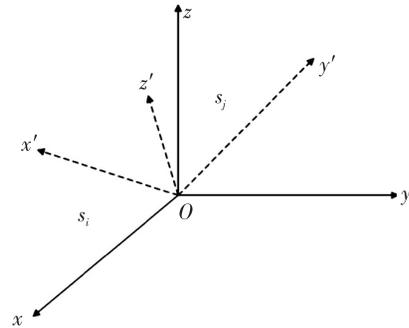


图2 坐标轴旋转示意图

Fig. 2 Diagram of coordinate axis rotation

根据所设计的坐标轴旋转方式,可确定出坐标变换矩阵 $\Phi$ ,其中 $\Phi$ 矩阵的各列分别是3个旋转后坐标轴的方向余弦。

由 $\Phi$ 矩阵可确定出 $s'_i, s'_j$ ,有式(1)所示的关系

$$s'_l = \Phi^{-1} s_l \quad (l=i, j) \quad (1)$$

对于DOA在旋转前后坐标系的取值 $k = [k_x, k_y, k_z]^T$ 和 $k' = [k'_x, k'_y, k'_z]^T$ ,存在式(2)的关系:

$$k = \Phi k' \quad (2)$$

假设第 $i, j$ 号传感器在旋转后坐标系中的位置为 $s'_i, s'_j$ ,则存在 $s'_i = [x'_i, 0, 0]^T$ 和 $s'_j = [x'_j, y'_j,$

$0]^\top$ , 其中的  $x'_i, x'_j, y'_j$  数值可由  $s_i, s_j$  和  $\Phi$  共同确定。对于两条无误差的 TDOA 测量曲线  $s_i k = c\tau_i$  和  $s_j k = c\tau_j$  而言, 它们的交叉点处的共同参数  $k$  或相应的  $\gamma$ , 具有如式(3)所示的等式方程组:

$$\begin{cases} c\tau_i = x'_i k'_x \\ c\tau_j = x'_j k'_x + y'_j k'_y \\ k'_z = \pm \sqrt{1 - k'^2_x - k'^2_y} \end{cases} \quad (3)$$

联立解上述方程组, 可求出  $k'_x = c\tau_i/x'_i, k'_y = (c\tau_j - x'_j k'_x)/y'_j$ 。但  $k'_z$  的取值取决于根号内的数值。

在获得交叉点的唯一 DOA 估计值之后, 依据三角函数关系可计算出相应的方向角  $\hat{\gamma}_{i,j} = [\hat{\varphi}_{i,j}, \hat{\theta}_{i,j}]^\top$ 。具体的算法过程如下:

**算法** 两条 TDOA 测量方程曲线的交叉点的算法

输入:  $s_i, s_j, \tau_i, \tau_j, c$ ;

设置零点近似范围的微小正数  $\zeta$ ;

采用 LLS 法估计出  $\hat{k}_{LLS}$ , 作为信号源 DOA 的参考值;

for  $i=1$  :  $N-1$

for  $j=i+1$  :  $N$

计算法线向量  $a_x, a_y, a_z, \Phi(:, 1), \Phi(:, 3), \Phi(:, 2)$ ;

计算:  $s'_i, s'_j, k'_x, k'_y$ ;

if  $k'^2_x + k'^2_y > 1 + \zeta$

无解

else if  $|k'^2_x + k'^2_y - 1| \leq \zeta$

$\hat{k}'_z = 0, \hat{k} = \Phi \hat{k}'$ ;

else

$\hat{k}'_z = \pm \sqrt{1 - \hat{k}'^2_x - \hat{k}'^2_y}$ , 计算正负  $\hat{k}'_z$  构成的两个

$\hat{k}'$  所对应的  $\hat{k}$ ;

对比两个  $\hat{k}$  取值与  $\hat{k}_{LLS}$  的角度的偏差量, 选择偏差量小者的  $\hat{k}$ ;

end

end

end

输出: 由  $\hat{k}$  计算相应的  $\hat{\varphi}_{i,j}, \hat{\theta}_{i,j}$ , 或提示不能计算交叉点。

## 2.2 GDOP 加权测向算法

假设共有  $N+1$  个传感器, 令第  $N+1$  号传感器为 TDOA 的测量基准传感器, 并位于坐标系原点, 并假定第  $i, j, N+1$  号传感器与信号源构成的几何结构

对应的精度因子为  $\text{GDOP}_{i,j}$ , 令向量  $\mathbf{g}$  为  $[\mathbf{g}]_l = 1/\text{GDOP}_{i,j}$ , 其中  $i=1, \dots, N-1; j=i+1, \dots, N; l=1, \dots, N(N-1)/2$ 。将归一化后的  $\text{GDOP}_{i,j}$ ; 加权向量记作  $\boldsymbol{\rho}$ , 则  $[\boldsymbol{\rho}]_l = [\mathbf{g}]_l / \|\mathbf{g}\|_1, l=1, \dots, N(N-1)/2$ 。

对各交叉点的结果形成的角度向量  $\hat{\varphi}$  和  $\hat{\theta}$  取加权, 可得最终的加权平均估计  $\bar{\varphi}$  和  $\bar{\theta}$ , 如式(4)所示:

$$\begin{cases} \bar{\varphi} = \sum_{l=1}^{N(N-1)} [\boldsymbol{\rho}]_l [\hat{\varphi}]_l \\ \bar{\theta} = \sum [\boldsymbol{\rho}]_l [\hat{\theta}]_l \end{cases} \quad (4)$$

## 3 仿真实验

### 3.1 参数设置

均方根误差(RMSE)显示了计算得到的估计位置结果与真实位置结果之间的偏差<sup>[10]</sup>。克拉美罗下界<sup>[11]</sup>(CRLB)是衡量一种定位算法的性能的指标。将求出的均方根误差与 CRLB 进行比较<sup>[12]</sup>, 以此来判断定位算法的性能。

对仿真实验进行参数设置: 使用 Matlab 进行模拟实验, 蒙特卡洛实验为 50 000 次。实验采用 6 个传感器进行测向, 传感器在半径为 30 m 的圆形区域内, 传感器  $z$  轴的坐标在  $[-5, +5]$  的区间内。TDOA 测量误差服从高斯分布<sup>[13]</sup>, 标准偏差在 0 ~ 25 ms 之间。系统误差服从高斯分布, 标准偏差在 0 ~ 15 m 之间。

### 3.2 实验结果分析

模拟实验结果图形中图例的含义分别是: LLS 为线性最小二乘法、TS 为泰勒级数展开法、EWI 法为均等加权的交叉点估计结果、BGI 法为最大权重对应的交叉点估计结果、WI 法为根据 GDOP 确定的综合权重对应的交叉点估计结果。

如图 3 所示, 随着信号噪声的增加, 所有算法的方位角均方根误差都在不断地增加。LLS 和 TS 的均方根误差较大, 在 EWI 法、BGI 法和 WI 法中, WI 法的均方根误差要低于 EWI 法和 BGI 法, 并且 WI 法最接近 CRLB。

如图 4 所示, 在信号噪声较小时, 所有算法的俯仰角均方根误差都比较接近。在信号噪声较大时, LLS 和 TS 的均方根误差都比较大, EWI 法、BGI 法和 WI 法的均方根误差十分的接近, 但 WI 法要低于其他两种算法。

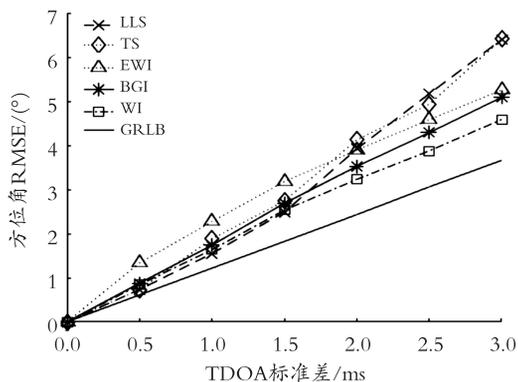


图3 方位角 RMSE

Fig. 3 Azimuth RMSE

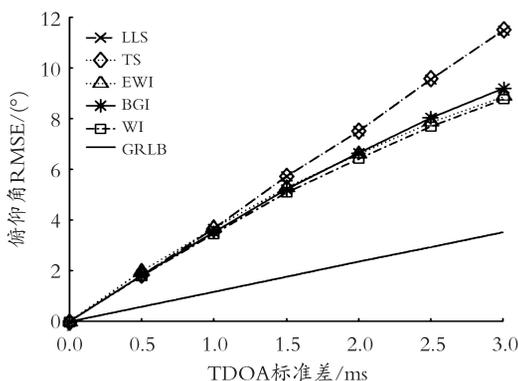


图4 俯仰角 RMSE

Fig. 4 Elevation RMSE

实验结果得出,根据 GDOP 确定的综合权重对应的交叉点估计结果 WI 法要比均等加权的 EWI 法和取最大权重对应的 BGI 法有着更小的定位误差,算法的定位性能要优于其他的方法。因此采用综合加权估计的 WI 法更能接近克拉美罗下界,提高了对交叉点估计的精度,具有较高的定位性能。所以,选择 WI 法作为最终的交叉点估计结果。

## 4 结束语

研究了两条 TDOA 曲线交叉点的坐标参量计算,这是由两个非线性方程求解两个未知变量的典型难题。针对这一问题,通过坐标系旋转,获得两个非线性方程关于两个未知变量的解析解,即方位角和俯仰角,改善了曲线交叉点测向精度不高的问题;与传统的加权方法相比,采用 GDOP 指标综合加权估计的 WI 法对目标位置的估计更加准确,有着更好的定位性能。由于参与定位传感器之间的几何排布结构会产生定位误差,下一步研究将改变传感器的数量和改进传感器的几何排布结构来获得更高的定位性能。

## 参考文献 (References):

- [1] 朱国辉,冯大政,聂卫科. 传感器位置误差情况下基于多维标度分析的时差定位算法[J]. 电子学报,2016,44(1):21—26  
ZHU G H, FENG D Z, NIE W K. TDOA Location Algorithm Based on Multidimensional Scaling Analysis under Sensor Position Error[J]. Acta Electronica Sinica, 2016,44(1):21—26(in Chinese)
- [2] 王文秀,董峰,张昊洋,等. 一种改进的到达时间差无线定位算法研究[J]. 科学技术与工程,2017,17(21):258—262  
WANG W X, DONG F, ZHANG H Y, et al. Research on An Improved Time Difference of Arrival Wireless Location Algorithm[J]. Science and Technology and Engineering, 2017,17(21):258—262(in Chinese)
- [3] LIU Y, GUO F, YANG L, et al. An Improved Algebraic Solution for TDOA Localization with Sensor Position Errors [J]. IEEE Transactions on Communications Letters, 2015,19(12):2218—2221
- [4] 肖卫初,陈伟宏,龚伦峰. 一种新的几何无线定位方法[J]. 科学技术与工程,2011,13(11):2945—2948  
XIAO W C, CHEN W H, GONG L F. A New Geometric Wireless Location Method[J]. Science Technology and Engineering, 2011,13(11):2945—2948(in Chinese)
- [5] 单志龙,刘方伟. 天线阵列用于无线传感器网络的节点定位算法[J]. 小型微型计算机系统,2014,35(1):85—88  
SHAN Z L, LIU F W. Node Localization Algorithm Based on Antenna Array for Wireless Sensor Networks [J]. Journal of Chinese Computer Systems, 2014,35(1):85—88(in Chinese)
- [6] 朱玉,任丽薇,刘佳媛. 一种高重频信号的时差定位方法[J]. 雷达与对抗,2017,37(4):23—25  
ZHU Y, REN L W, LIU J Y. A TDOA Location Method for High PRF Signals[J]. Radar and Countermeasure, 2017,37(4):23—25(in Chinese)
- [7] WANG G, LI Y M, ANSARI N. A Semidefinite Relaxation Method for Source Localization Using TDOA and FDOA Measurements [J]. IEEE Transactions on Vehicular Technology,2013,62(2):853—862
- [8] 崔逊学,卢松升,陈云飞,等. 基于短基线传感器网络的远场声源 TDoA 定位组合算法[J]. 计算机研究与发展,2014,51(3):465—478  
CUI X X, LU S S, CHEN Y F, et al. TDOA Location Combination Algorithm for Far Field Sound Source Based on Short Baseline Sensor Network [J]. Journal of Computer Research and Development, 2014,51(3):465—478(in Chinese)
- [9] 吴晨焯. NLOS 环境中基于 TDOA 和 TOA 的无线定位

- 研究[D]. 南京:南京邮电大学,2014
- WU C Y. Research on Wireless Location Based on TDOA and TOA in NLOS Environment[D]. Nanjing: Nanjing University of Posts and Telecommunications, 2014 (in Chinese)
- [10] YIN J, WAN Q, YANG S, et al. A Simple and Accurate TDOA-AOA Localization Method Using Two Stations[J]. IEEE Transactions on Signal Processing Letters, 2016, 23(23):144—158
- [11] 曲付勇,孟祥伟. 基于约束总体最小二乘方法的到达时差到达频差无源定位算法[J]. 电子与信息学报, 2014, 36(5):1075—1081
- QU F Y, MENG X W. Passive Location Algorithm Based on Constrained Total Least Square Method[J]. Journal of Electronics and Information Technology, 2014, 36(5):1075—1081 (in Chinese)
- [12] 秦兆涛,王俊,魏少明,等. 基于目标高度先验信息的多站时差无源定位方法[J]. 电子与信息学报, 2018, 40(9):1—8
- QIN Z T, WANG J, WEI S M, et al. Multi Station TDOA Passive Location Method Based on Target Height Prior Information[J]. Journal of Electronics and Information, 2018, 40(9):1—8 (in Chinese)
- [13] 方姝,倪育德,刘逸,等. 基于最小二乘与 Taylor 级数展开的新型混合定位方法[J]. 计算机工程, 2015, 41(6):316—321
- FANG S, NI Y D, LIU Y, et al. A New Hybrid Localization Method Based on Least Squares and Taylor Series Expansion [J]. Computer Engineering, 2015, 41(6):316—321 (in Chinese)

## Research on Direction Finding Algorithm of Curve Intersection Based on Time Difference of Arrival

LIU Qing-kun, SUN Guang-hui, CUI Xun-xue

(School of Electrical and Information Engineering, Anhui University of Science and Technology, Anhui Huainan 232001, China)

**Abstract:** In order to solve the problems of low precision and difficult weight determination of the traditional direction finding method based on time difference of arrival, a method is proposed to calculate the intersection point by rotating coordinate system and weighting different intersection parameters according to GDOP. Through the rotation of coordinate system, the analytic solutions of two nonlinear equations about two unknown variables, namely azimuth angle and elevation angle, are obtained, which improves the problem of low accuracy of direction finding at curve intersection; compared with the traditional weighted method, the WI method with GDOP index comprehensive weighted estimation is more accurate for target position estimation. Simulation results show that the performance of the algorithm with three different weighting methods is verified. According to the experimental results, the WI method with comprehensive weighted estimation is closer to the Cramer-Rao Lower Bound, which improves the accuracy of intersection estimation and which has higher positioning performance.

**Key words:** time difference of arrival; direction finding; rotation coordinate system; weight; Cramer-Rao Lower Bound

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

刘青琨,孙广慧,崔逊学. 基于到达时间差的曲线交叉点测向算法研究[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2021, 38(4):10—14

LIU Q K, SUN G H, CUI X X. Research on Direction Finding Algorithm of Curve Intersection Based on Time Difference of Arrival [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(4):10—14