第 38 卷第 2 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2021 年 4 月
Vol. 38　No. 2　　J Chongqing Technol & Business Univ(Nat Sci Ed)　　Apr. 2021

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2021.0002.006

球带上 LAPLACE 算子第一特征值的一些性质*

吕　康，黄振友

(南京理工大学 理学院，南京 210094)

摘　要：Laplace 算子特征值的研究在物理上有着重要的应用，它与粒子在力场中运动时所具有的能级有密切关系，根据最大-最小原理，可以对特征值进行理论上的表示；针对三维欧式空间单位球的球带上具有 Robin 型边条件的 Laplace 算子的特征值问题，先利用 Courant 节点域定理和最大-最小原理，求出了第一特征值的理论表示；然后利用此表示，证明了球带在关于赤道对称时第一特征值最大(球带面积固定)；且若球带的面积小于等于$\sqrt{2}\pi$，有当球带向赤道靠近时，第一特征值会严格增加的结果。

关键词：Sturm-Liouville 方程；Laplace 算子；第一特征值

中图分类号：O175.9　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-058X(2021)02-0035-05

0　引　言

考虑

$$\Delta u+\lambda u=0 \tag{1}$$

$$u=0,\ \forall x\in\partial\Omega \tag{2}$$

其中，Ω 为三维欧氏空间单位球上的球带，$\Omega=\{x:\xi\leqslant\varphi\leqslant\eta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$。上述问题有可数个单调递增的特征值满足：

$$0<\lambda_1<\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n\leqslant\cdots$$

且 $\lambda_n\to\infty\ (n\to\infty)$(称 λ_1 为第一特征值或最小特征值)。由最大-最小原理，对于比较靠前的特征值相对来说更容易处理。尤其是 λ_1,λ_2，它们与粒子在某一场中运动所具有的能级有关[1]。SHEN 和 SHIEH[2] 得到当 Ω 的面积不变，ξ 逐渐增加时式(1)(2)的最小特征值严格增加的结果，且当 Ω 关于赤道平面对称时达到最大；SHIEH[3] 得到当 Ω 面积在小于等于 2π 时，第二特征值也在它关于赤道平面对称的时候最大(但是这里并没有得到单调性)；RAMM 和 SHIVAKUMAR[4] 考虑 $\Omega=D_1(0)D_r(h)$，其中 $0<r<1$，$D_r(h)=\{(x,y):(x-h)^2+y^2\leqslant r^2\}$，得到当 $0<h<1-r$ 时，λ_1 关于 h 单调减，SHIEH[5] 将文献[4]的结果推广到三维情形，得到类似的结论。

考虑

$$\begin{cases}\Delta u+\lambda u=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial\nu}+\sigma u=0,\ \forall x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{3}$$

其中 $\sigma>0$，ν 是 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。利用最大-最小原理，证明了当 Ω 的面积固定时，式(3)的第一特征值在 Ω 关于赤道平面对称的时候最大[6-10]；其次，如果它的面积小于等于$\sqrt{2}\pi$，则第一特征值 λ_1 关于 ξ 有单调性，即 Ω 越靠近赤道，第一特征值越大；最后，说明了文献[2]的结果可以推广到高维上去。

1　主要结果和证明

假设 Ω 的面积为 $S=2\pi A$，考虑当 A 固定，随着 ξ 的增加，式(3)的第一特征值 λ_1 的变化趋势是怎样的。对于式(3)中的 Robin 型边条件，不难得到它实际上等价于

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\xi}-\sigma u=0,\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}\Big|_{\varphi=\eta}+\sigma u=0 \tag{4}$$

收稿日期：2020-04-15；**修回日期**：2020-05-18.

* **基金项目**：国家自然科学基金(11871031/A010602).

作者简介：吕康(1996—)，男，安徽淮南人，硕士研究生，从事微分算子谱理论研究.

用分离变量法,令 $u=f(\varphi)g(\theta)$,由式(3)及(4)得

$$g''(\theta)+c^2g(\theta)=0$$

$$g^{(j)}(0)=g^{(j)}(2\pi),j=0,1 \tag{5}$$

$$f''(\varphi)+\cot\varphi f'(\varphi)+\left(\lambda-\frac{c^2}{\sin^2\varphi}\right)f(\varphi)=0 \tag{6}$$

$$f'(\xi)-\sigma f(\xi)=f'(\eta)+\sigma f(\eta)=0 \tag{7}$$

式(5)的解显然是清楚的,考虑式(6)(7)。对于经典的 Sturm-Liouville 方程,特征值可以用 Rayleigh 商表达出来,因此需要将式(6)作变换,使它呈经典的 Sturm-Liouville 方程形式。

引理 1 对于形如

$$y''+py'+qy+\lambda y=0,y(0)=y(1)$$

的方程,若 $p\in L[0,1]$,则可以通过适当变换将其变换为经典的 Sturm-Liouville 方程的形式,即形如 $DpDy+qy+\lambda y=0,y(0)=y(l)$ 的方程。

证明 作变换:

$$f(z)=y(x),z(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

令 $l:=z(1)=\int_0^1 \mathrm{e}^{\int_0^s p(t)\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$,有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{f'(z)\mathrm{e}^{2\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}\}+q(z)f(z)+\lambda f(z)=0$$

$$f(0)=f(l)=0$$

可得证。

根据引理 1,可以将式(6)变为想要的形式。作变换:

$$x=\int_\xi^\varphi \sin t\mathrm{d}t=\cos\xi-\cos\varphi$$

$$h(x)=f(\varphi)$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{\sin^2\varphi h'(x)\}+\left(\lambda-\frac{c^2}{\sin^2\varphi}\right)h(x)=0 \tag{8}$$

$$\sin\xi h'(0)-\sigma h(0)=\sin\eta h'(A)+\sigma h(A)=0 \tag{9}$$

由 Courant 节点域定理不难得到当 $c^2=0$ 时,对应的式(6)(7)的最小特征值是式(3)的第一特征值,即

$$\lambda_1(\xi)=\inf_{h\in W_2^1(0,A)}\{\int_0^A \sin^2\varphi h'^2(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi h^2(0)+\sigma\sin\eta h^2(A)\}$$

令 $a=\arccos\left(\frac{A}{2}\right)$,当 $\xi=a$ 时,Ω 关于赤道对称,则 $\sin\eta=\sin\xi=\sin a$。设式(8)(9)对应于 λ_1 的规范化特征向量是 $h_0(x)$,不难得到它关于 $x=\frac{A}{2}$ 对称,令

$$H(\xi)=\int_0^A \sin^2\varphi h'^2_0(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi h_0^2(0)+\sigma\sin\eta h_0^2(A)$$

因此有 $\lambda_1\leqslant H(\xi)$,$H(a)=\lambda_1(a)$。猜想当 Ω 关于赤道对称的时候,λ_1 达到最大值。为了得到这个结果,比较直观的想法是比较 $H(\xi)$ 和 $H(a)$ 的关系。于是便有下述定理:

定理 1 式(3)中,若 Ω 面积固定为 $2\pi A$ 不变,当 Ω 关于赤道对称时,λ_1 最大。

证明 只需证明 $H'(\xi)>0$, $\forall\xi\in(0,a)$ 即可。这样便有

$$\lambda_1\leqslant H(\xi)<H(a)=\lambda_1(a)$$

事实上,

$$H'(\xi)=\int_0^A 2\sin\xi\cos\varphi h'^2_0(x)\mathrm{d}x+\sigma\cos\xi h_0^2(0)+\sigma\cot\eta\sin\xi h_0^2(A)$$

当 $\xi=a$ 时,$h_0(x)$ 关于 $x=\frac{A}{2}$ 对称,且

$$\cos\varphi=\cos a-x=\frac{A}{2}-x$$

关于 $x=\frac{A}{2}$ 为奇函数,$\cot\xi+\cot\eta=0$,因此有

$$H'(a)=\int_0^A 2\sin a\left(\frac{A}{2}-x\right)h'^2_0(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin ah_0^2(0)(\cot a+\cot\eta)=0$$

而 $\forall\xi\in(0,a)$,$\cot\xi+\cot\eta>0$,于是

$$H'(\xi)=\int_0^A 2\sin\xi(\cos\xi-x)h'^2_0(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi h_0^2(0)(\cot\xi+\cot\eta)>0$$

证毕。

引理 2 当 $x\geqslant 0$,$y\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,$xy\leqslant\frac{1-x^2}{1-y^2}$ 成立。

引理 3 考虑

$$\{p(x;t)y'(x;t)\}'+\lambda y(x;t)=0,x\in(0,1)$$

$$y'(0;t)-h_1(t)y(0;t)=y'(1;t)+h_2(t)y(1;t)=0$$

其中 $t\in[0,1]$ 为参数,$p(x;t)$,$h_1(t)$,$h_2(t)\geqslant a>0$,且 $p(x;t)$ 一阶偏导都连续,$h_1(t)$,$h_2(t)$ 为光滑函数,则它的特征值关于 t 连续(如果没有特别说明,求导默认对 x 求导)。

证明 利用最大-最小原理,类似于文献[6]定理 6.10 可证。

引理 4 设 $u(x;t)$ 满足:

$$\{p(x;t)y'(x;t)\}'+\lambda y(x;t)=0,x\in(0,1)$$

$$y'(0;t)=h_1(t);y(0;t)=1$$

若引理 3 中的条件成立,则 $u(x;t)$,$u'(x;t)$ 连续。

证明　利用常数变易法,设

$$y_1(x;t)=1,y_2(x;t)=\int_0^x\frac{1}{p(s;t)}\mathrm{d}s$$

是该问题对应的齐次方程的两个解。

$$u(x;t)=c_1(x;t)+c_2(x;t)\int_0^x\frac{1}{p(s;t)}\mathrm{d}s$$

不难得到

$$u(x;t)=c_1(t)+c_2(t)\int_0^x\frac{1}{p(s;t)}\mathrm{d}s-\int_0^x\lambda(t)u(s;t)p(s;t)\int_s^x\frac{1}{p(z;t)}\mathrm{d}z\mathrm{d}s \tag{10}$$

由边条件有

$$c_1(t)=u(0;t)=1$$

$$c_2(t)=u'(0;t)p(0;t)=h_1(t)p(0;t) \tag{11}$$

由引理 3 和式(10)(11),逐次迭代可得证。

定理 2　当 $A\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时,在定理 1 其他条件不变的情况下,$\lambda_1(\xi)$ 关于 ξ 严格单调递增。

证明　为了得到这个结果,需要证明 $\frac{\mathrm{d}\lambda_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi}:=\dot{\lambda}_1(\xi)>0,\forall\xi\in(0,a)$。记 $h_\zeta(x)$ 表示 $\xi=\zeta$ 时的规范化特征函数,于是有

$$\lambda_1(\xi)\leqslant\int_0^A\sin^2\varphi_\xi h'^2_{\xi+\Delta\xi}(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi h^2_{\xi+\Delta\xi}(0)+\sigma\sin\eta h^2_{\xi+\Delta\xi}(A)$$

$$\lambda_1(\xi+\Delta\xi)\leqslant\int_0^A\sin^2\varphi_{\xi+\Delta\xi}h'^2_\xi(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin(\xi+\Delta\xi)h^2_\xi(0)+\sigma\sin(\eta+\Delta\eta)h^2_\xi(A)$$

从而

$$\begin{aligned}&\int_0^A(\sin^2\varphi_{\xi+\Delta\xi}-\sin^2\varphi_\xi){h'_{\xi+\Delta\xi}}^2(x)\mathrm{d}x+\sigma(\sin(\xi+\Delta\xi)-\sin\xi){h_{\xi+\Delta\xi}}^2(0)+\\&\sigma(\sin(\eta+\Delta\eta)-\sin\eta){h_{\xi+\Delta\xi}}^2(A)\leqslant\lambda_1(\xi+\Delta\xi)-\lambda_1(\xi)\leqslant\\&\int_0^A(\sin^2\varphi_{\xi+\Delta\xi}-\sin^2\varphi_\xi){h'_\xi}^2(x)\mathrm{d}x+\sigma(\sin(\xi+\Delta\xi)-\sin\xi){h_\xi}^2(0)+\\&\sigma(\sin(\eta+\Delta\eta)-\sin\eta){h_\xi}^2(A)\end{aligned} \tag{12}$$

由引理 4 及式(12),容易得到

$$\dot{\lambda}_1(\xi)=\int_0^A2\sin\xi\cos\varphi_\xi h'^2_\xi(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi(\cot\xi h^2_\xi(0)+\cot\eta h^2_\xi(A))$$

假设 $\exists\xi_0\in(0,a)$,使得 $\dot{\lambda}_1(\xi_0)=0$,令

$$H_0(\xi)=\int_0^A\sin^2\varphi_\xi h'_{\xi_0^2}(x)\mathrm{d}x+\sigma\sin\xi h_{\xi_0^2}(0)+\sigma\sin\eta h_{\xi_0^2}(A)$$

则有

$$H'_0(\xi)=\int_0^A2\sin\xi\cos\varphi_\xi h'_{\xi_0^2}(x)\mathrm{d}x+\sigma\cos\xi h_{\xi_0^2}(0)+\sigma\cot\eta\sin\xi h_{\xi_0^2}(A)$$

显然 $\lambda_1(\xi_0)=H_0(\xi_0),\dot{\lambda}_1(\xi_0)=H'_0(\xi_0)$,于是

$$H'_0(\xi_0)=\int_0^A2\sin\xi_0\cos\varphi_{\xi_0}h'_{\xi_0^2}(x)\mathrm{d}x+\sigma\cos\xi_0h_{\xi_0^2}(0)+\sigma\cot\eta\sin\xi_0h_{\xi_0^2}(A)=0$$

不难看出一定有 $\xi_0\geqslant\frac{\pi}{4}$,进而,如果有

$$H'_0(\xi)<H'_0(\xi_0)=0,\forall\xi\in(\xi_0,a) \tag{13}$$

就能得到矛盾。事实上,如果式(13)成立,则有

$$\lambda_1(a)\leqslant H_0(a)<H_0(\xi_0)=\lambda_1(\xi_0)$$

这与定理 1 矛盾。

下面证明式(13)。只需证明 $h'_{\xi_0^2}(x),h_{\xi_0^2}(0),h_{\xi_0^2}(A)$ 对应的系数函数在(ξ_0,a)上为减函数即可。$\cos\xi$ 自然是减函数,对于 $\sin\xi\cos\varphi_\xi$,关于 ξ 求导得

$$\cos\xi\cos\varphi_\xi-\sin^2\xi=\cos\xi(\cos\xi-x)-\sin^2\xi<\cos^2\xi-\sin^2\xi$$

又由于 $\xi_0\geqslant\frac{\pi}{4}$,于是有

$$\cos^2\xi-\sin^2\xi<0,\forall\xi\in(\xi_0,a)$$

最后,考虑 $\sin\xi\cot\eta$,有

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\xi\cot\eta)}{\mathrm{d}\xi}=\frac{1}{\sin\eta}(\cos\xi\cos\eta-\frac{\sin^2\xi}{\sin^2\eta})$$

由引理 2,得

$$\frac{\mathrm{d}(\sin\xi\cot\eta)}{\mathrm{d}\xi}<0,\forall\xi\in(\xi_0,a)$$

证毕。

下面说明式(1)(2)中当 Ω 为高维(维度 $n\geqslant3$)空间中的球带时,它的第一特征值关于 ξ 也具有单调性。R^n 中球坐标变换:

$$x_1=r\cos\varphi_1,\cdots,x_n=r\sin\varphi_1\cdots\sin\varphi_{n-1}$$

其中 $0\leqslant\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-2}\leqslant\pi,0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant2\pi$,称 φ_{n-2} 为最后一个天顶角;设 $\Omega=\{x:0<A_i\leqslant\varphi_i\leqslant B_i<\pi;\ i=1,2,\cdots,n-3;A_{n-2}=\xi\leqslant\varphi_{n-2}\leqslant\eta=B_{n-2},0\leqslant\varphi_{n-1}\leqslant2\pi\}$,下面证明若 Ω 的其他角不变,只有最后一个天顶角改变,则 Ω 越靠近赤道,式(1)(2)的第一特征值越大。

(1) 在球坐标系下的方程为

$$\Delta u+\lambda u=\frac{\partial^2u}{\partial\varphi_1^2}+\frac{(n-2)\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi_1}+\frac{1}{\sin^2\varphi_1}\times\frac{\partial^2u}{\partial\varphi_2^2}+\frac{(n-3)\cos\varphi_2}{\sin\varphi_2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi_2}+\frac{1}{\sin^2\varphi_2}\times\left\{\cdots\left\{\frac{\partial^2u}{\partial\varphi_i^2}+\frac{(n-1-i)\cos\varphi_i}{\sin\varphi_i}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi_i}+\right.\right.$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi_i}\cdot\left\{\cdots\left\{\frac{1}{\sin^2\varphi_{n-3}}\cdot\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi_{n-2}^2}+\frac{\cos\varphi_{n-2}}{\sin\varphi_{n-2}}\cdot\frac{\partial u}{\partial\varphi_{n-2}}+\frac{1}{\sin^2\varphi_{n-2}}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi_{n-1}^2}\right\}\cdots\right\}+\lambda u\right.$$

设 $u=h_1(\varphi_1)\cdots h_{n-1}(\varphi_{n-1})$,则有

$$h''_{n-1}+s_0=0,h_{n-1}^{(j)}(0)=h_{n-1}^{(j)}(2\pi),j=0,1 \quad (14)$$

$$\cdots$$

$$h''_{n-k}+\frac{(k-1)\cos\varphi_{n-k}}{\sin\varphi_{n-k}}h'_{n-k}+\left(s_{k-1}-\frac{s_{k-2}}{\sin^2\varphi_{n-k}}\right)h_{n-k}=0$$

$$h_{n-k}(A_{n-k})=h_{n-k}(B_{n-k})=0 \quad (15)$$

$$\cdots$$

$$h''_1+\frac{(n-2)\cos\varphi_1}{\sin\varphi_1}h'_1+\left(s_{n-2}-\frac{s_{n-3}}{\sin^2\varphi_1}\right)h_1=0$$

$$h_1(A_1)=h_1(B_1)=0 \quad (16)$$

其中 $\lambda=s_{n-2}$,由 Courant 节点定理,当式(14)(15)中的每一个 $s_{k-1}(k=1,2,\cdots,n-2)$都取对应方程的最小特征值(记作 μ_{k-1},且 $\mu_0=0$)的时候,代入式(16),求得的最小特征值 μ_{n-2} 即为式(1)(2)的第一特征值 λ_1。

设 Ω 的面积为

$$S=2\pi\int_\eta^\xi\sin\varphi_{n-2}\mathrm{d}\varphi_{n-2}\cdots\int_{A_1}^{B_1}(\sin\varphi_1)^{n-2}\mathrm{d}\varphi_1:=2\pi S_{n-2}\cdots S_1$$

由引理 1,令

$$z=\int_{A_{n-k}}^{\varphi_{n-k}}(\sin\varphi_{n-k})^{k-1}\mathrm{d}\varphi_{n-k},g_{n-k}(z)=h_{n-k}(\varphi_{n-k})$$

则式(19)变为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\{(\sin\varphi_{n-k})^{2k-2}g'_{n-k}(z)\}+\left(s_{k-1}-\frac{s_{k-2}}{\sin^2\varphi_{n-k}}\right)g_{n-k}(z)=0$$

$$g_{n-k}(0)=g_{n-k}(S_{n-k})=0,k=2,\cdots,n-1$$

于是,

$$\mu_{k-1}=\inf_{g_{n-k}\in T_k}\left\{\int_0^{S_{n-k}}(\sin\varphi_{n-k})^{2k-2}g'^2_{n-k}(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-k}}\frac{\mu_{k-2}}{\sin^2\varphi_{n-k}}g^2_{n-k}(z)\mathrm{d}z\right\},k=2,\cdots,n-1 \quad (17)$$

其中 $T_k=\{f\in H_0^1(0,S_{n-k}):\|f\|=1\}$。

定理 3 当 Ω 的面积 $S=2\pi S_{n-2}\cdots S_1$ 不变,在区间 $\left[0,\arccos\frac{S_{n-2}}{2}\right]$ 上,式(1)(2)的最小特征值 λ_1 关于 ξ 严格增。

证明 由式(17)知道,$\mu_{k-1}(k=2,\cdots,n-1)$实际上是 ξ 的函数,记为 $\mu_{k-1}(\xi)$,将 $\mu_0=0$ 代入式(15)(取 $k=2$),得

$$h''_{n-2}+\frac{\cos\varphi_{n-2}}{\sin\varphi_{n-2}}h'_{n-2}+s_1h_{n-2}=0$$

$$h_{n-2}(\xi)=h_{n-2}(\eta)=0 \quad (18)$$

由文献[2]知道,在 ξ 从 0 开始增加到 $\arccos\frac{S_{n-2}}{2}$ 的过程中,式(18)的最小特征值 μ_1 是严格增加的。反复利用式(15),可知随着 ξ 的增加,$\mu_{k-1}(\xi)$ 是单调增的($k=2,\cdots,n-1$),下面证明它是严格单调增加的。

设 m 是当 ξ 增加时使得 μ_{m-2} 严格单调增加而 μ_{m-1} 不严格增加的最小数,则 $\exists\xi_1,\xi_2$,且 $0\leqslant\xi_1<\xi_2\leqslant\arccos\frac{S_{n-2}}{2}$,使得 $\mu_{m-1}(\xi_1)=\mu_{m-1}(\xi_2)$。由假设,$\mu_{m-2}(\xi_1)<\mu_{m-2}(\xi_2)$,于是 $\exists\delta_0>0$,使得 $\forall g\in T_m$,有

$$\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_2)-\mu_{m-2}(\xi_1)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2(z)\mathrm{d}z>\delta_0 \quad (19)$$

由于 $\mu_{m-1}(\xi_1)=\mu_{m-1}(\xi_2)$ 及式(17),$\forall\varepsilon>0$,$\exists g_\varepsilon\in T_m$,使得

$$\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_2)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z<\mu_{m-1}(\xi_2)+\varepsilon$$

又因为

$$\mu_{m-1}(\xi_1)\leqslant\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_1)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z$$

于是

$$\mu_{m-1}(\xi_2)=\mu_{m-1}(\xi_1)\leqslant\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_1)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z<\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_2)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z<\mu_{m-1}(\xi_2)+\varepsilon$$

于是

$$\left\{\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_2)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z\right\}-\left\{\int_0^{S_{n-m}}(\sin\varphi_{n-m})^{2m-2}g'^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z+\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_1)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z\right\}=\int_0^{S_{n-m}}\frac{\mu_{m-2}(\xi_2)-\mu_{m-2}(\xi_1)}{\sin^2\varphi_{n-m}}g^2_\varepsilon(z)\mathrm{d}z<\varepsilon$$

这与式(19)矛盾。从而得到 $\lambda_1=\mu_{n-2}$ 关于 ξ 严格单调增。证毕。

2 结束语

首先介绍了与本文相关的 Laplace 算子特征值问题的一些结果,然后针对三维欧式空间单位球的

球带上具有 Robin 型边条件的 Laplace 算子的特征值问题,利用 Courant 节点域定理确定问题的第一特征值及其 Rayleigh 表示。分析发现在球带关于赤道对称时第一特征值最大; 同时,当球带面积小于等于$\sqrt{2}\pi$时,球带越靠近赤道,第一特征值越大;最后说明了文献[2]里的结果可以推广到高维上去。

参考文献(References):

[1] SINGER I M, WONG B, YAU S T, et al. An Estimate of the Gap of the First Two Eigenvalues in the Schroedinger Operator[J]. Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze, 1985, 12(2): 319—333

[2] SHEN C L, SHIEH C T. Some Properties of the First Eigenvalue of the Laplace Operator on the Spherical Bands[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1992, 23(5): 1305—1308

[3] SHIEH C T. On the Second Eigenvalue of the Laplace Operator on A Spherical Bands[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2004, 132(1): 157—164

[4] RAMM A G, SHIVAKUMAR P N. Inequalities for the Minimal Eigenvalue of the Laplacian in an Annulus[J]. Math Inequalities and Appl, 1998, 1(4): 559—563

[5] SHIEH C T. On the Behavior of the First Eigenvalue of the Sphereical Laplacian Operator on a Sphereical Annulus[J]. Math Inequalities and Appl, 2006, 9(1): 147—15

[6] COURANT R, HILBERT D. Methods of Mathematical Physics[M]. NewYork: John Wiley & Sons, 1989

[7] 刘景麟. 常微分算子谱论[M]. 北京:科学出版社,2009
LIU J L. Spectral Theory of Ordinary Differential Operators[M]. Beijing: Science Press, 2009(in Chinese)

[8] KONG Q, ZETTL A. Dependence of Eigenvalues of Sturm-Liouville Problems on the Boundary[J]. Journal of Differential Equations, 1996, 126(2): 389—407

[9] DAUGE M, HELGGER B. Eigenvalues VariationI. Neumann Problem for Sturm-Liouville Operators[J]. J Diff Equations, 1993, 104: 243—262

[10] 陈淼,杜厚维,向长林. 一类分数阶 Laplace 算子方程解的正则性[J]. 长江大学学报(自然科学版),2020, 17(6): 108—113
CHEN M, DU H W, XIANG C L. Regularity of Solutions for a Class of Fractional Laplace Operator Equations[J]. Journal of Yangtze University (Natural Science Edition), 2020, 17(6): 108—113(in Chinese)

Some Properties of the First Eigenvalue of Laplace Operator on a Spherical Band

LU Kang, HUANG Zhen-you

(School of Science, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China)

Abstract: The researches of the eigenvalue problems of Laplace operator have many applications to physics, they relate to the levels of power belonging to the particles when particles across certain fields. By Maximum-Minimum Principle, we can formulate the eigenvalues theoretically. Based on the eigenvalue problem of Laplace operator on a spherical band in three dimensional space with Robin boundary conditions, we formulated the first eigenvalue by virtue of Courant nodal domain theorem and Maximum-Minimum Principle, then by this formulation, we proved that the first eigenvalue would be maximum when the band is symmetric about the equator (the area of the band is constant), also, if the area of the band is smaller than or equals to $\sqrt{2}\pi$, then the first eigenvalue would monotonously increase when the band moves to the equator.

Key words: Sturm-Liouville equation; Laplace operator; first eigenvalue

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

吕康,黄振友. 球带上 LAPLACE 算子第一特征值的一些性质[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2021,38(2):35—39

LU K, HUANG Z Y. Some Properties of the First Eigenvalue of Laplace Operator on a Spherical Band[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2021, 38(2): 35—39