

基于 Z-number 的 PROMETHEE 多属性决策方法^{*}

张晓珍¹, 毛军军^{1,2**}, 卢亚楠¹

(1. 安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601; 2. 安徽大学 计算机智能与信号处理教育部重点实验室, 合肥 230039)

摘 要:针对 Z-number 能够模拟带有不确定信息的自然语言,却没有有效的应用方法这一问题,提出了已知部分权重时以 Z-number 为信息环境的多属性决策方法。首先,在 Z-number 理论上利用模糊性限制和可靠性限制之间的关系,建立了两个非线性模型计算 Z-number 的潜在概率;其次,结合模糊数的交叉熵和 KL 散度,构造了离散 Z-number 交叉熵公式,并且提出了基于 Z-number 的 PROMETHEE 多属性决策方法;该方法结合级别高于关系理论,建立了取值为 0~1 的优先函数,利用优先函数公式获得优先指数矩阵,进一步计算出净流,然后根据净流大小对各方案进行排序;最后,通过一个实例的应用与分析说明提出方法的有效性和可行性。

关键词:Z-number; 潜在概率; 交叉熵; PROMETHEE 方法; 多属性决策

中图分类号:C934 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2020)05-0030-07

0 引 言

多属性决策是指在综合考虑多个属性信息情况下,根据需求选择最佳方案或者对方案进行排序。然而,现实生活中的决策信息往往具有不确定性,这导致信息处理十分困难。针对这个问题,Zadeh^[1]于 2011 年提出 Z-number 的概念,同时考虑到信息的模糊性限制和可靠性限制。一个 Z-number 有(A,B)两个组成部分,其中 A 是可取的实值不确定随机变量 X 值的限制,B 是 A 的可靠度。例如,非常确定,西班牙的人口大约有 4 500 万,可以用数表示为(大约 4 500 万,非常确定)^[1]。从例子可以看出,用 Z-number 模拟带有不确定性信息的自然语言很容易实现,但是它的运算非常复杂。

针对这个难题,许多学者进行了深入研究,并且取得了一些初步成果。Yager^[2]以 Z-Valuation 的

形式提供不确定变量 V 的信息,表明 V 是 A 的概率等于 B 的事实,并且诱导出与 V 的概率分布相关的可能性分布;Aliiev 等^[3-5]分别讨论了离散和连续 Z-number 的加、减、乘、除等基本运算,并且提出基于部分可靠信息的 T-norm 和 T-conorm 聚合算子;Kang 等^[6]提出将可靠性限制 B 转换为权重乘到模糊性限制 A 上,把 Z-number 转变为传统模糊数;Yaakob 等^[7]基于 Kang 的理论,提出 Z-TOPSIS 方法进行多准则决策;Shen 等^[8]提出多维 Z-number 的算法,并且构造了综合加权度量;Dong 等^[9]提出考虑决策者风险偏好的多属性决策方法。

为了充分挖掘 Z-number 中所蕴含的丰富信息,通过模糊性限制和可靠性限制之间的关系构造非线性模型计算潜在概率;利用熵“当一个不可能出现的结果出现时,它提供了更多的信息,相反,则提供了较少的信息”这一特点构造了离散 Z-number 交叉熵度量,然后结合 PROMETHEE 方法提出了一种

收稿日期:2019-12-06;修回日期:2020-01-16.

^{*} 基金项目:国家自然科学基金面上项目资助(71871001);国家自然科学基金青年项目资助(618006001).

作者简介:张晓珍(1996—),女,山东临沂人,硕士研究生,从事统计决策研究.

^{**} 通讯作者:毛军军(1973—),女,浙江杭州人,教授,博士,从事人工智能、数据挖掘与多属性决策研究. Email:maojunjun@ahu.edu.cn.

新的多属性决策方法,在综合考虑各属性的情况下,对方案进行排序。

1 预备知识

在本节中主要回顾了有关模糊数、Z-number、交叉熵的基本定义,这些定义将会在后面的章节中有所涉及。

定义 1^[1] (Z-number) Z-number 是一对有序模糊数 (A, B) , 与实值不确定随机变量 X 相关。其中 A 是模糊性限制, $R(X)$ 是可取 X 上的值, 记做 X is A , 并且满足可能性约束:

$$R(X): X \text{ is } A \rightarrow Poss(X=u) = \mu_A(u)$$

μ_A 是 A 的隶属函数, u 是 X 中的值。 B 是 A 的可靠度, 与必然、自信、可能等概念有关。潜在概率 $P(x)$ 是未知的, 关于 $P(x)$ 的约束如下:

$$\int \mu_A(u) P(u) du \text{ is } B$$

定义 2^[3] (离散 Z-number) 如果 $Z=(A, B)$ 是一个 Z-number 满足如下性质:

(1) A 是一个离散模糊数, 其隶属函数为

$$\mu_A: \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \rightarrow [0, 1], \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R$$

(2) B 是一个离散模糊数, 其隶属函数为

$$\mu_B: \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \rightarrow [0, 1], \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \subset [0, 1]$$

那么称 $Z=(A, B)$ 是离散 Z-number。

定义 3^[3] (Z^+ -number) 一个离散 Z^+ -number 可以表示为 $Z^+=(A, R)$, 其中 A 是可取的实值不确定变量 X 值的限制, R 是 X 的概率分布 $p(x)$ 。设为论域, 那么 μ 和 p 表示如下:

$$\mu = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n$$

$$p = p_1/x_1 + p_2/x_2 + \dots + p_n/x_n$$

在这里 $\mu_i/x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示 $X=x_i$ 的可能性为 μ_i , 类似地, $p_i/x_i (i=1, 2, \dots, n)$ 表示当 $X=x_i$ 的概率为 p_i 。

2 离散 Z-number 的交叉熵

2.1 离散 Z-number 的潜在概率

在 Z-number 理论中, 为了获得更多不确定性信息, 基于最小偏差原则构造了非线性模型来获得更加可靠、稳定的潜在概率。在模型中, $Z=(A, B)$ 是用来描述实值不确定随机变量 X 值的离散, 它的潜在概率满足如下条件:

$$\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 \text{ 并且 } P(x_i) \geq 0 \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)} \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P(x_i) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\} \quad (3)$$

基于以上 3 个条件, 从不同角度考虑构造了下面两个 Z-number 的非线性规划模型。

模型 I:

$$\min \left(\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P_j(x_i) - b_j \right)^2$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P_j(x_i) = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i P_j(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i) / \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \\ P_j(x_i) \geq 0, 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

通过以上模型可以得到潜在概率矩阵 $P=(P_j(x_i))_{n \times n}$, 然后对 P 各列求加权平均, 得到

$$P^I(x_i) = \frac{\sum_{j=1}^n \mu_B(b_j) P_j(x_i)}{\sum_{j=1}^n \mu_B(b_j)}$$

模型 II:

$$\min \sum_{j=1}^n \mu_B(b_j) \left(\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P(x_i) - b_j \right)^2 / \sum_{j=1}^n \mu_B(b_j)$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n P(x_i) = 1 \\ \sum_{i=1}^n x_i P(x_i) = \sum_{i=1}^n x_i \mu_A(x_i) / \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) \\ P(x_i) \geq 0, 1 \leq i \leq n, j = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

计算模型 II, 可以直接得到 $P^II(x_i)$ 。

通过具体的例子来说明以上两个模型。

例 1 设 Z_1, Z_2 分别为两个离散 Z-number, 在这里

$$A_1 = \frac{0}{1} + \frac{0.5}{2} + \frac{0.8}{3} + \frac{1}{4} + \frac{0.8}{5} + \frac{0.7}{6} + \frac{0.6}{7} + \frac{0.4}{8} + \frac{0.2}{9} + \frac{0}{10}$$

$$B_1 = \frac{0}{0.1} + \frac{0.3}{0.2} + \frac{0.6}{0.3} + \frac{0.7}{0.4} + \frac{0.8}{0.5} + \frac{0.9}{0.6} + \frac{1}{0.7} + \frac{0.8}{0.8} + \frac{0.5}{0.9} + \frac{0}{1}$$

$$A_2 = \frac{0}{1} + \frac{0.3}{2} + \frac{0.5}{3} + \frac{0.6}{4} + \frac{0.7}{5} + \frac{0.8}{6} + \frac{1}{7} + \frac{0.6}{8} + \frac{0.4}{9} + \frac{0}{10}$$

$$B_2 = \frac{0}{0.1} + \frac{0.5}{0.2} + \frac{1}{0.3} + \frac{0.8}{0.4} + \frac{0.7}{0.5} + \frac{0.6}{0.6} + \frac{0.4}{0.7} + \frac{0.2}{0.8} + \frac{0.1}{0.9} + \frac{0}{1}$$

首先对 Z 数进行标准化, 令

$$\tilde{x} = \frac{x_i}{\max(A_j)}, \mu_A(\tilde{x}_i) = \mu_A(x_i), j=1, 2$$

得到 $\tilde{Z}_j = (\tilde{A}_j, B_j)$, 然后使用模型 I 求得潜在概率矩阵 P , 对 P 的各列求加权平均, 则

$$P_1^I = \frac{0.083\ 7}{1} + \frac{0.049\ 1}{2} + \frac{0.058\ 9}{3} + \frac{0.384\ 9}{4} + \frac{0.065\ 4}{5} + \frac{0.057\ 4}{6} + \frac{0.161\ 9}{7} + \frac{0.044\ 0}{8} + \frac{0.042\ 0}{9} + \frac{0.052\ 8}{10}$$
$$P_2^I = \frac{0.054\ 3}{1} + \frac{0.028\ 1}{2} + \frac{0.031\ 8}{3} + \frac{0.280\ 2}{4} + \frac{0.046\ 6}{5} + \frac{0.052\ 9}{6} + \frac{0.347\ 3}{7} + \frac{0.047\ 1}{8} + \frac{0.047\ 0}{9} + \frac{0.064\ 8}{10}$$

使用模型 II 进行求解直接可得:

$$P_1^{II} = \frac{0.149\ 6}{1} + \frac{0.117\ 3}{2} + \frac{0.111\ 0}{3} + \frac{0.104\ 7}{4} + \frac{0.098\ 4}{5} + \frac{0.092\ 1}{6} + \frac{0.085\ 8}{7} + \frac{0.079\ 6}{8} + \frac{0.073\ 3}{9} + \frac{0.088\ 2}{10}$$
$$P_2^{II} = \frac{0.089\ 5}{1} + \frac{0.098\ 3}{2} + \frac{0.097\ 1}{3} + \frac{0.095\ 9}{4} + \frac{0.094\ 7}{5} + \frac{0.093\ 5}{6} + \frac{0.092\ 3}{7} + \frac{0.091\ 1}{8} + \frac{0.089\ 9}{9} + \frac{0.157\ 5}{10}$$

通过上面例子的结果可以看到两个模型的求解结果有所差异, 这是因为模型 I 在求解过程中首先考虑让 $\sum_{i=1}^n \mu_A(x_i) P_X(x_i)$ 和各个 b_j 之间的差距尽可能小, 然后综合考虑各个 b_j 之间的关系给出权重, 最终确定潜在概率, 而模型 II 在求解过程中同时考虑这两方面的因素, 直接求出了最终潜在概率。由此可以看出, 模型 I 更加全面地利用了 Z-number 信息, 而模型 II 更具有实际操作性。在实际问题中, 可以根据侧重点选择模型, 当更注重信息的利用时选择模型 I, 而更注重实际操作性时则选择模型 II, 以确保得到更加真实有效的结果。在下面的讨论中, 主要考虑模型 II 的情况。

2.2 离散 Z-number 基于潜在概率的交叉熵

传统的模糊集在处理不确定信息上有很大优势, 但它在表达决策信息时没有考虑可靠性的影响。Zadeh 提出的 Z-number 同时考虑了信息的模糊

限制和可靠性限制, 本节基于模糊数交叉熵和 KL 散度, 提出了 Z-number 的交叉熵的定义。

定义 4 设 Z_1, Z_2 为两个离散 Z-number, 则有 Z_1, Z_2 交叉熵矩阵 E 定义如下:

$E = [e_{ij}]_{n \times n}$ 是一个 $n \times n$ 矩阵, 其中:

$$e_{ij} = \mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i}) \ln \frac{\mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i})}{\frac{1}{2}(\mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i}) + \mu_{A_2}^{\alpha_2}(x_{2j}))} + (1 - \mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i})) \ln \frac{1 - \mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i})}{1 - \frac{1}{2}(\mu_{A_1}^{\alpha_1}(x_{1i}) + \mu_{A_2}^{\alpha_2}(x_{2j}))} + P(x_{1i}) \ln \frac{P(x_{1i})}{P(x_{2j})}$$

在这里,

$$\alpha_j = \frac{\sum_i x_i \mu_{B_j}(x_{ji})}{\sum_i \mu_{B_j}(x_{ji})}, j=1, 2$$

定义 5 设 $Z_1 = (A_1, B_1), Z_2 = (A_2, B_2)$ 为两个离散 Z-number, X_1, X_2 分别是 A_1, A_2 的论域, 那么 A_1, A_2 之间的策略值向量定义如下

$$S = [s_i]_{1 \times n}$$

这里

$$s_i = \frac{1}{2}(x_{1i} + x_{2i}) / \max(X_1, X_2)$$

$(x_{ji} \in \text{supp}(A_j) = \{x_{ji}, 0 \leq i \leq n, n \in N^* \mid j=1, 2\})$ 是 A_1, A_2 的策略值。

定义 6 设 Z_1, Z_2 为两个离散 Z 数, 则有 Z_1, Z_2 的交叉熵定义如下:

$$CE(Z_1, Z_2) = SES^T$$

其中, S 是 A_1, A_2 之间的策略值向量, E 是 Z_1, Z_2 的交叉熵矩阵。然而, 这个交叉熵按照它的元素是非对称的, 因此, 提出了对称的交叉熵:

$$C(Z_1, Z_2) = |CE(Z_1, Z_2) - CE(Z_1, Z_1)| + |CE(Z_2, Z_1) - CE(Z_2, Z_2)| \quad (1)$$

显然, 式(2)满足交叉熵的性质。

续例 1 根据定义的综合交叉熵公式, 求两种模型下两 Z-number 之间的综合交叉熵。将例 1 中的各数代入式(1)得:

$$C^I(Z_1, Z_2) = 0.676\ 2, C^{II}(Z_1, Z_2) = 0.719\ 2$$

3 基于 PROMETHEE 的决策方法

在这里, 考虑利用 PROMETHEE 方法进行多属性决策。PROMETHEE 方法是 Drans 于 1984 年提

出的建立在级别高于关系上的排序方法。它通过定义优先函数,根据各方案属性值之间差距的大小来判断方案之间的优劣程度。优先函数取值为 0 ~ 1,函数值越小,说明在同一属性下两方案间的优先程度越小,函数值越大,说明在同一属性下两方案间的优先程度越大。在本节中,将 PROMETHEE 方法推广到 Z 数情形中来为各方案排序。

假设有 m 个方案, n 个准则,分别为 $O = \{a_1, a_2 \cdots a_m\}$ 、 $C = \{c_1, c_2 \cdots c_n\}$ 。区别于主观地给出权重,在这里,考虑知道部分权重信息的情况,根据提出的综合交叉熵公式,构造模型来获得准则权重。

为了更好地分辨方案的优劣,采用交叉熵最大化原则来确定准则权重,如果在某一准则下方案间交叉熵较大,那么就给它一个较大的权重,相反,就给它一个较小的权重,基于以上观点,构建了下面的线性模型:

$$\begin{aligned} &\max \sum_{j=1}^n \omega_j \sum_{i=1}^m \sum_{k=1}^m C(z_{ij}, z_{kj}) \\ &\begin{cases} \sum_{j=1}^n \omega_j = 1 \\ \omega_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (M-1) \end{aligned}$$

定义 7 设 Z_{1j} 、 Z_{2j} 为两个离散 Z-number, 则它的优先函数定义如下:

$$H(Z_{1j}, Z_{2j}) = \begin{cases} \frac{C(Z_{1j}, Z_{2j})}{\max_{i,j,k} C(Z_{ij}, Z_{kj})}, & Z_1 > Z_2 \text{ 时} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (2)$$

其中, $\max_{i,j,k} C(Z_{ij}, Z_{kj})$ 为各属性下任意两个 Z-number 间的最大距离。

基于定义的优先函数,对于每一对方案 a_i 、 a_k ($1 \leq i, k \leq n$), 当方案各属性权重分别为 ω_j 、 $j = 1, 2, \dots, m$ 时,定义其优先指数为

$$\Pi(a_i, a_k) = \frac{\sum_j \omega_j H(Z_{ij}, Z_{kj})}{\sum_j \omega_j} \quad (3)$$

对于每一个方案 a_i ($1 \leq i \leq n$) 定义流出 $\varphi^+(a_i)$ 和流入 $\varphi^-(a_i)$ 和净流 $\varphi(a_i)$:

$$\varphi^+(a_i) = \sum_k \Pi(a_i, a_k) \quad (4)$$

$$\varphi^-(a_i) = \sum_k \Pi(a_k, a_i) \quad (5)$$

$$\varphi(a_i) = \varphi^+(a_i) - \varphi^-(a_i) \quad (6)$$

显然,流出 $\varphi^+(a_i)$ 越大, a_i 相对于其他方案级别越高,流入 $\varphi^-(a_i)$ 越小,其他方案优于 a_i 可能性越小,因此根据净流大小可以确定各方案间级别级

别高于关系如下:

(1) 若 $\varphi(a_i) > \varphi(a_j)$, 则称 $a_i > a_j$;

(2) 若 $\varphi(a_i) = \varphi(a_j)$, 则称 $a_i \sim a_j$;

也就是说, $\varphi(a_i)$ 越大, 方案越优。

下面给出在 Z 数信息下利用 PROMETHEE 法解决多属性决策问题的步骤:

(1) 获得标准化决策矩阵;

(2) 根据模型 II (或者 I) 求各 Z-number 的潜在概率;

(3) 按照文献[5]中的排序方法对各属性下的 Z-number 进行排序;

(4) 计算各属性下方案间的交叉熵 C_j ($j = 1, 2, 3, 4$), 通过模型 (M-1) 计算各属性权重 ω_j ;

(5) 根据各属性下 Z-number 排序和方案间的交叉熵得到各属性下的优先函数矩阵 H_j ($j = 1, 2, 3, 4$), 然后计算优先指数矩阵 Π 。

(6) 分别计算流出 $\varphi^+(a_i)$ 、流入 $\varphi^-(a_i)$ 以及净流 $\varphi(a_i)$ 。

(7) 比较各方案净流大小, 获得方案排序。

4 实例分析与应用

现如今,激烈的市场竞争迫使各公司加强内部管理,而人力资源管理部门作为公司和人员管理之间的关键纽带在评价人员表现中扮演重要角色。某公司中层管理职位有一空缺,现有 4 名竞选者 $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ 。为了挑选合适的人选担任这一职位,首先,公司组织高层管理者和专家制定了评价准则:领导力 c_1 、计划和组织能力 c_2 、评价和决策能力 c_3 、适应能力 c_4 , 并商量出这些准则的具体评价指标 (见表 1、表 2) 和部分准则权重如下:

表 1 S 中语言术语和对应离散模糊数
Table 1 Linguistic terms in S and corresponding discrete fuzzy numbers

语言术语 s	离散模糊数
s_0 很差	0/0+0.5/0.5+1/1+0.5/1.5+0/2
s_1 差	0/1+0.5/1.5+1/2+0.5/2.5+0/3
s_2 比较差	0/2+0.5/2.5+1/3+0.5/3.5+0/4
s_3 一般	0/3+0.5/3.5+1/4+0.5/4.5+0/5
s_4 比较好	0/4+0.5/4.5+1/5+0.5/5.5+0/6
s_5 好	0/5+0.5/5.5+1/6+0.5/6.5+0/7
s_6 很好	0/6+0.5/6.5+1/7+0.5/7.5+0/8

表 2 S'中语言术语和对应离散模糊数

Table 2 Linguistic terms in S' and corresponding discrete fuzzy numbers

语言术语 s'	离散模糊数
s' ₀ 很不确定	0/0+0.5/0.05+1/0.1+0.5/0.2+0/0.3
s' ₁ 不确定	0/0.1+0.5/0.2+1/0.3+0.5/0.4+0/0.5
s' ₂ 中立	0/0.3+0.5/0.4+1/0.5+0.5/0.6+0/0.7
s' ₃ 确定	0/0.5+0.5/0.6+1/0.7+0.5/0.8+0/0.9
s' ₄ 很确定	0/0.7+0.5/0.8+1/0.9+0.5/0.95+0/1

$\{\omega_3 \geq \omega_4 \geq 0.25, \omega_1 + \omega_2 \geq 0.4, \omega_3 \geq 1.2\omega_4, \omega_1 \geq 1.5\omega_2\}$

其次,由该公司人力资源管理部门对各竞选者表现进行评价。最后,应用提出的方法对各竞选者表现进行排序。

4.1 提出方法的应用

现按照第 3 节中的 PROMETHEE 方法步骤求解多属性决策问题。

(1) 获得标准化评价矩阵(表 3)。

表 3 竞选者表现评价信息

Table 3 Evaluation information on campaign performance

	c ₁	c ₂	c ₃	c ₄
a ₁	(s ₄ , s' ₄)	(s ₅ , s' ₂)	(s ₆ , s' ₂)	(s ₅ , s' ₃)
a ₂	(s ₅ , s' ₃)	(s ₄ , s' ₃)	(s ₄ , s' ₄)	(s ₄ , s' ₃)
a ₃	(s ₄ , s' ₂)	(s ₃ , s' ₄)	(s ₅ , s' ₃)	(s ₆ , s' ₂)
a ₄	(s ₆ , s' ₃)	(s ₄ , s' ₄)	(s ₄ , s' ₂)	(s ₃ , s' ₄)

(2) 根据模型 II 获得决策矩阵中各 Z 数的潜在概率。

(3) 按照文献[5]中的排序方法对各属性下的 Z 数进行排序,得到表 4。

表 4 各属性下 Z-number 排序

Table 4 The order of Z-number in each attribute

属性 j	Z 数排序
1	Z ₄₁ > Z ₂₁ > Z ₁₁ > Z ₃₁
2	Z ₁₂ > Z ₄₂ > Z ₂₂ > Z ₃₂
3	Z ₁₃ > Z ₃₃ > Z ₂₃ > Z ₄₃
4	Z ₃₄ > Z ₁₄ > Z ₂₄ > Z ₄₄

(4) 按式(1)计算各属性下距离矩阵 C_j(j=1, 2, 3, 4)如下

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.324 & 0.172 & 1.193 \\ 0.324 & 0.000 & 0.488 & 1.643 \\ 0.172 & 0.488 & 0.000 & 1.040 \\ 1.193 & 1.643 & 1.040 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.254 & 2.367 & 0.181 \\ 0.254 & 0.000 & 2.428 & 0.078 \\ 2.367 & 2.428 & 0.000 & 2.347 \\ 0.181 & 0.078 & 2.347 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C_3 = \begin{bmatrix} 0.000 & 1.394 & 1.838 & 1.242 \\ 1.394 & 0.000 & 0.324 & 0.172 \\ 1.838 & 0.324 & 0.000 & 0.488 \\ 1.242 & 0.172 & 0.488 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$C_4 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.399 & 1.838 & 2.217 \\ 0.399 & 0.000 & 1.325 & 2.428 \\ 1.838 & 1.325 & 0.000 & 4.042 \\ 2.217 & 2.428 & 4.042 & 0.000 \end{bmatrix}$$

按照模型(M-1)获得各属性权重

$$\omega = [0.270 \ 0 \ 0.180 \ 0 \ 0.300 \ 0 \ 0.250 \ 0]$$

(5) 根据表 4 中各属性下 Z 数的排序以及交叉熵 C_j(j=1, 2, 3, 4),按照式(2)计算各属性下的优先函数矩阵 H_j(j=1, 2, 3, 4)如下

$$H_1 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.000 & 0.042 & 0.000 \\ 0.080 & 0.000 & 0.120 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.295 & 0.406 & 0.257 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$H_2 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.063 & 0.585 & 0.044 \\ 0.000 & 0.000 & 0.600 & 0.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \\ 0.000 & 0.019 & 0.580 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$H_3 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.345 & 0.454 & 0.307 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.042 \\ 0.000 & 0.080 & 0.000 & 0.120 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

$$H_4 = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.098 & 0.000 & 0.548 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.600 \\ 0.454 & 0.327 & 0.000 & 1.000 \\ 0.000 & 0.000 & 0.000 & 0.000 \end{bmatrix}$$

利用式(3)计算优先指数矩阵:

$$H = \begin{bmatrix} 0.000 & 0.139 & 0.253 & 0.237 \\ 0.021 & 0.000 & 0.140 & 0.162 \\ 0.113 & 0.106 & 0.000 & 0.286 \\ 0.079 & 0.126 & 0.174 & 0.000 \end{bmatrix}$$

(6) 根据 H,按照式(4)一式(6)分别计算各方案的流出 φ⁺(a_i)、流入 φ⁻(a_i)和净流 φ(a_i)得到表 5;

(7) 根据净流大小,获得最终方案排序为 a₁ >

$a_2 > a_3 > a_4$, 因此, a_1 是最优竞选者。

表 5 流出、流入与净流

Table 5 Outflow, inflow and net flow			
序 号	$\varphi^+(a_j)$	$\varphi^-(a_j)$	$\varphi(a_j)$
1	0.630 3	0.215 1	0.415 2
2	0.325 3	0.371 7	-0.046 4
3	0.505 9	0.568 0	-0.062 1
4	0.379 9	0.686 6	-0.306 4

4.2 比较分析

比较分析是一个重要的工具,通过它可以进一步验证提出方法的正确性,在本节中,利用和其他现有决策方法的比较分析来说明提出方法的可行性和有效性。

在表 6 中给出了这几种方法和本文提出方法的最终排序结果。下面对表 6 中的排序结果进行进一步分析。

表 6 不同方法的排序结果

Table 6 Sorting results of different methods		
序 号	方 法	排 序
1	Yaakob 和 Gegov 的方法	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$
2	Shen 等的方法	$a_1 > a_3 > a_4 > a_2$
3	Dong 等的方法	$a_1 > a_3 > a_2 > a_4$
4	提出方法	$a_1 > a_2 > a_3 > a_4$

首先,Yaakob 和 Gegov 的方法^[7]与提出方法排序结果完全一致,然而,这种方法是有缺陷的,它将可靠性限制 B 作为权重乘到模糊性限制 A 上,虽然有基于模糊集的理论的严格证明,但这会导致大量信息丢失。其次,Shen 等^[8]的方法与提出方法最优方案一致,但他们提出的距离度量是有问题的,它主要考虑可靠性限制的影响,忽视了模糊性限制的影响,这不满足 Zadeh 关于 Z-number 的最初的定义。最后,Dong 等^[9]的方法与提出方法排序结果基本一致,最优方案为 a_1 ,最差方案为 a_4 ,但它在考虑 Z-number 模糊性限制时没有考虑到可靠性限制的影响,从 Z-number 最初的定义角度来看,二者相互影响,不可分割。

提出的方法充分考虑到上面提出方法的不足,并做了进一步改进,它的优点概括如下:

(1) 离散 Z-number 的交叉熵不仅考虑了 Z-

number 的模糊性限制和可靠性限制,还同时考虑到这两者之间关系,这完全符合 Zadeh 关于 Z-number 的定义。

(2) 通过模糊性限制和可靠性限制之间的关系,计算出了 Z-number 的潜在概率,在构造交叉熵时将潜在概率的因素考虑进去,并且与其他方法单纯考虑模糊集隶属函数相区别,在这里,还考虑到模糊集支撑集中元素的影响。

(3) 本文基于提出的交叉熵度量,构造了 Z-number 情形下的 PROMETHEE 方法来解决复杂的多属性决策问题,这不仅增强了 PROMETHEE 方法的能力,还推广了它的应用范围。

总的来说,通过对比分析可以看出提出方法具有可行性和有效性。

5 结束语

在 Z-number 的理论基础上,提出了改进的潜在概率模型和离散 Z-number 的交叉熵,并且在此基础上提出了一种新的决策方法。区别于人为给出权重,部分权重已知更加具有现实意义,以模型求权重也更为合理,因此基于提出的交叉熵度量来获得属性权重。然后,将 PROMETHEEA 方法推广到 Z-number 情形下,构造优先函数,优先指数,通过比较净流大小来获得最终方案排序。在这里,主要考虑了离散情形下 Z-number 的应用,针对连续情形,还需要更加深入的研究。

参考文献(References):

[1] ZADEH L A. A Note on Z-numbers[J]. Inf Sci,2011, 181(2):2923—2932

[2] YAGER R R. On Z-valuations Using Zadeh’s Z-numbers [J]. Intell Syst,2012, 27(3):259—278

[3] ALIEV R A, ALIZADEH A V, HUSEYNOV O H. The Arithmetic of Discrete Numbers[J]. Inf Sci, 2015, 290 (C):134—155

[4] ALIEV R A, HUSEYNOV O H, ZEINALOVA L M. The Arithmetic of Continuous Z-numbers[J]. Inf Sci,2016, 373(C):441—460

[5] ALIEV R R, HUSEYNOV O H, ALIYEVA K R. Z-valued T-norm and T-conorm Operators-based Aggregation of Partially Reliable Information[J]. Procedia Comput

Sci,2016,102(7): 12—17

[6] KANG B, WEI D, LI Y, et al. A Method of Converting Znumber to Classical Fuzzy Number[J]. Inf Comput Sci, 2012,9(3):703—709

[7] YAAKOB A M, GEGOV A. Interactive TOPSIS Based Group Decision Making Methodology Using Z-numbers [J]. Comput Intell Syst,2016,9(2):311—324

[8] SHEN K W, WANG J Q. Z-VIKOR Method Based on A New Weighted Comprehensive Distance Measure of Z-number and Its Application [J]. Fuzzy Syst, 2018,26(6):3232—3245

[9] DONG Q, WANG X K, WANG J Q, et al. Cross Entropy for Discrete Z-numbers and Its Application in Multi-criteria Decision-making[J]. Fuzzy Syst, 2019, 21(6): 1786—1800

[10] WANG F, MAO J J. Approach to Multicriteria Group Decision Making with Z-numbers Based on TOPSIS and Power Aggregation Operators[J]. Mathematical Problems in Engineering,2019(3):1—18

Approach to Multi-attribute Decision Making with PROMETHEE Based on Z-Numbers

ZHANG Xiao-zhen¹, MAO Jun-jun^{1,2**}, LU Ya-nan¹

(1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;

2. Key Laboratory of Intelligent Computing & Signal Processing of Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: Aiming at the fact that Z-number can simulate natural language with uncertain information, but there is no effective application method, a multi-attribute decision making method with Z-number as information environment with known partial weight is proposed. Firstly, based on Z-number theory, two nonlinear models are established to calculate the potential probability of Z-number by using the relationship between fuzzy restriction and reliability restriction. Secondly, combining the cross entropy and KL divergence of fuzzy numbers, the discrete Z-number cross entropy formula is constructed, and the PROMETHEE multi-attribute decision approach based on Z-number is proposed. In this method, combining the theory of outranking relation, a priority function of taking a value from 0 to 1 is established, a priority index matrix is obtained by using a priority function formula, further, the net flow is calculated, and then the schemes are sorted according to the net flow. Finally, the effectiveness and feasibility of the proposed method are illustrated by the application and analysis of an example.

Key words: Z-number; hidden probability; cross entropy; PROMETHEE method; multi-attribute decision making

责任编辑:罗姗姗

引用本文/Cite this paper:

张晓珍,毛军军,卢亚楠. 基于 Z-number 的 PROMETHEE 多属性决策方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(5):30—36

ZHANG X Z, MAO J J, LU Y N. Approach to Multi-attribute Decision Making with PROMETHEE Based on Z-Numbers[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(5): 30—36