doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0004.017

关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 1\ 379y^2$ *

曹　瑞, 罗　明**
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘　要:关于 $x^3 \pm 1 = Dy^2 (D>0)$ 型不定方程的解法还没有一般性的结论;研究 $D=1\ 379$ 时不定方程 $x^3 \pm 1 = Dy^2$ 的可解性问题,利用同余理论、递归序列、平方剩余以及 Pell 方程解的性质证明了不定方程 $x^3+1=1\ 379y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$,不定方程 $x^3-1=1\ 379y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0)$;所使用的代数方法可以推广到求解大系数的三次不定方程中去.

关键词:不定方程;正整数解;递归数列;同余式

中图分类号:O156.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2020)04-0118-05

1　基础知识

对 $x^3 \pm 1 = Dy^2 (D>0)$ 型的不定方程整数解的研究一直是一个经典课题,无数的数学家和数学爱好者为之着迷. 目前,已知的成果有:当 D 无法分解出 $6k+1$ 型的素因数时,柯召、孙琦[1]、曹珍富[2]等人已找到求整数解的一般代数方法,后人可以推广用之. 但当 D 可以分解出 $6k+1$ 型的素因数时,方程的求解还没有统一的一般方法. 罗明[3]证明了 $x^3+1=14y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(5,\pm 3)$, $x^3-1=14y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0)$;邱克娥等[4]证明了 $x^3+1=333y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0),(11,\pm 2)$;周科[5]证明了 $x^3+1=1\ 043y^2$ 仅有整数解 $(x,y)=(-1,0)$. 本文研究不定方程 $x^3 \pm 1 = Dy^2$,当 $D=1\ 379$ 时是否存在整数解的问题,受文献[6-11]的启发,主要使用了递归数列、平方剩余等代数方法,这些工作为求解二次项系数较大的不定方程提供了一些参考思路. 首先引入如下引理:

引理 1[6]　设 a,b 是 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解,则存在下面递归序列成立:

$$x_{n+2}=2ax_{n+1}-x_n, x_0=1, x_1=a$$
$$y_{n+2}=2ay_{n+1}-y_n, y_0=0, y_1=b$$

特别地,当 $D=3$ 时,Pell 方程 $x^2-3y^2=1$ 的基本解为 $(a,b)=(2,1)$,并且通解 (x_n,y_n) 满足以下递推关系:

$$x_{n+1}=2x_n+3y_n, x_0=1, x_1=2$$
$$y_{n+1}=x_n+2y_n, y_0=0, y_1=1$$
$$y_{2n}=2x_ny_n, x_{2n}=x_n^2+3y_n^2$$
$$y_{n-1}=-x_n+2y_n, x_{n-1}=2x_n-3y_n$$

引理 2[1]　不定方程 $4x^4-3y^2=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(\pm 1,\pm 1)$.

引理 3[1]　不定方程 $x^4-3y^2=1$ 仅有整数解 $(x,y)=(1,0),(-1,0)$.

收稿日期:2019-09-26;**修回日期**:2019-11-21.
* **基金项目**:曹瑞(1995—),男,四川盐边人,硕士,从事代数数论研究.
** **作者简介**:罗明(1958—),男,重庆人,教授,从事代数数论研究. Email:luoming1958@126.com.

2　主要结果及证明

定理 1　不定方程

$$x^3+1=1\ 379y^2 \tag{1}$$

仅有整数解$(x,y)=(-1,0)$.

证明　因为 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 且 $(x+1,x^2-x+1)=(x+1,(x+1)^2-3(x+1)+3)=(x+1,3)=1$ 或 3，所以不定方程 $x^3+1=1\ 379y^2$ 有如下 8 种可能的分解：

Ⅰ $x+1=a^2,x^2-x+1=1\ 379b^2,y=ab$；

Ⅱ $x+1=3a^2,x^2-x+1=4\ 137b^2,y=3ab$；

Ⅲ $x+1=7a^2,x^2-x+1=197b^2,y=ab$；

Ⅳ $x+1=21a^2,x^2-x+1=591b^2,y=3ab$；

Ⅴ $x+1=1379a^2,x^2-x+1=b^2,y=ab$；

Ⅵ $x+1=4137a^2,x^2-x+1=3b^2,y=3ab$；

Ⅶ $x+1=197a^2,x^2-x+1=7b^2,y=ab$；

Ⅷ $x+1=591a^2,x^2-x+1=21b^2,y=3ab$.

其中 $a\geqslant0,b>0$，且 $ab\neq0$ 时，$\gcd(a,b)=1$.

下面讨论这 8 种情形下方程的整数解.

情形Ⅰ—Ⅳ：由于 $x^2-x+1\equiv0\pmod{197}$，即 $(2x-1)^2\equiv-3\pmod{197}$，而勒让得符号 $1=\left(\frac{(2x-1)^2}{197}\right)=\left(\frac{-3}{197}\right)=-1$，矛盾. 故在情形Ⅰ—Ⅳ时，式(1)无解.

情形Ⅴ：由第二式解得 $x=0,1$，均不符合第一式，故在情形Ⅴ时，式(1)无解.

情形 Ⅶ：由第一式可得 $x\equiv-1\pmod{197}$，代入第二式得 $x^2-x+1=7b^2\equiv3\pmod{197}$，勒让得符号：

$$\left(\frac{7b^2}{197}\right)=\left(\frac{7}{197}\right)=\left(\frac{197}{7}\right)=\left(\frac{1}{7}\right)=1$$

而$\left(\frac{3}{197}\right)=-1$，前后矛盾. 所以在情形Ⅶ时，式(1)无解.

情形Ⅷ：当 $2\mid x$，a 为奇数，$a^2\equiv1\pmod 4$，由第一式可得 $x\equiv2\pmod 4$. 当 $2\nmid x$ 时，a 为偶数，$a^2\equiv0\pmod 4$，由第一式可得 $x\equiv3\pmod 4$. 代入第二式均推出：

$$3\equiv x^2-x+1=21b^2\equiv1\pmod 4$$

矛盾. 故在情形Ⅷ时，式(1)无解.

情形Ⅵ：第二式化为 $(2b)^2-3\left(\frac{2x-1}{3}\right)^2=1$，第一式代入得 $(2b)^2-3(2\ 758a^2-1)^2=1$. 因此有：

$$2b+(2\ 758a^2-1)\sqrt3=$$
$$\pm(r_n+s_n\sqrt3)=\pm(2+\sqrt3)^n$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$，$2+\sqrt3$ 是 Pell 方程 $r^2-3s^2=1$ 的基本解，因此有 $2\ 758a^2=\pm s_n+1$，$n\in\mathbf{Z}$. 又因为 $s_{-n}=-s_n$，所以只需考虑 $2\ 758a^2=s_n+1$. 当 $2\mid n$时，由引理 1 知 $2\mid s_n$，则 $2\ 758a^2=s_n+1$ 不可能成立. 又当 $n\equiv1\pmod 4$，$s_n\equiv1\pmod 8$，则 $2\ 758a^2\equiv2\pmod 8$，也不可能. 故必须 $n\equiv3\equiv-1\pmod 4$. 令 $n=4m-1$，有

$$2\ 758a^2=s_{4m-1}+1=-r_{4m}+2s_{4m}+1=$$
$$-(1+6s_{2m}^2)+4r_{2m}s_{2m}+1=2(2r_{2m}-3s_{2m})s_{2m}$$

即有

$$1\ 379a^2=r_{2m-1}s_{2m} \tag{2}$$

又因为 $(r_{2m-1},s_{2m})=(2r_{2m}-3s_{2m},s_{2m})=(2r_{2m},s_{2m})=(2,s_{2m})=2$. 如果 $r_n\equiv0\pmod{197}$，则 $3s_n^2\equiv-1\pmod{197}$，但 $\left(\frac{3}{197}\right)=-1$，$\left(\frac{-1}{197}\right)=1$，矛盾. 故 $197\nmid fr_n$，则式(2)有以下两种情况：

$$r_{2m-1}=2c^2,s_{2m}=2\ 758d^2,a=2cd \tag{3}$$

$$r_{2m-1}=14c^2,s_{2m}=394d^2,a=2cd \tag{4}$$

其中 $c\geqslant0,d\geqslant0,\gcd(c,d)=1$. 把式(3)的第一式代入 $r_{2m-1}^2-3s_{2m-1}^2=1$ 中得 $4c^4-3s_{2m-1}^2=1$. 由引理 2 知，应有 $s_{2m-1}=\pm1$，即 $m=0$ 或 1. 但 $m=1$ 时，式(3)的第二式不成立，而 $m=0$ 时，式(3)中的 $d=0$，则 $a=0$，从而得到式(1)的平凡解$(x,y)=(-1,0)$.

根据式(4)的第二式和引理 1，有方程

$$r_m=e^2,s_m=197f^2,d=e\times f$$

其中 $e\geqslant0,f\geqslant0,\gcd(e,f)=1$，故 $e^4-3s_m^2=1$. 由引理 3 知 $(r_m,s_m)=(e^2,s_m)=(1,0)$，则 $m=0$，得到 $r_{2m-1}=r_{-1}=1$，这不符合式(4)中的第一式，故式(4)无解. 所以情形Ⅵ仅给出方程(1)的平凡解$(x,y)=(-1,0)$.

综上所述,不定方程 $x^3+1=1\ 379y^2$ 仅有平凡整数解$(-1,0)$.

定理 2　不定方程

$$x^3-1=1\ 379y^2 \tag{5}$$

仅有整数解$(x,y)=(1,0)$.

证明　因为 $x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$且$(x-1,x^2+x+1)=(x-1,(x-1)^2+3(x-1)+3)=(x-1,3)=1$ 或 3,所以不定方程 $x^3-1=1\ 379y^2$ 有如下 8 种可能的分解:

Ⅰ $x-1=a^2,x^2+x+1=1379b^2,y=ab$;

Ⅱ $x-1=3a^2,x^2+x+1=4137b^2,y=3ab$;

Ⅲ $x-1=7a^2,x^2+x+1=197b^2,y=ab$;

Ⅳ $x-1=21a^2,x^2+x+1=591b^2,y=3ab$;

Ⅴ $x-1=1379a^2,x^2+x+1=b^2,y=ab$;

Ⅵ $x-1=4137a^2,x^2+x+1=3b^2,y=3ab$;

Ⅶ $x-1=197a^2,x^2+x+1=7b^2,y=ab$;

Ⅷ $x-1=591a^2,x^2+x+1=21b^2,y=3ab$.

其中 $a\geqslant 0,b>0$,且 $ab\neq 0$ 时,$\gcd(a,b)=1$.

下面讨论这 8 种情形下方程的解.

情形Ⅰ—Ⅳ:由于 $x^2+x+1\equiv 0 \pmod{197}$,即$(2x+1)^2\equiv -3 \pmod{197}$,而勒让得符号 $1=\left(\frac{(2x+1)^2}{197}\right)=\left(\frac{-3}{197}\right)=-1$,矛盾. 故在情形Ⅰ—Ⅳ时,式(5)无解.

情形Ⅴ:由第二式解得 $x=0,-1$,均不符合第一式,故在情形Ⅴ时,式(5)无解.

情形Ⅶ:由第一式得 $x\equiv 1 \pmod{197}$,代入第二式得 $x^2+x+1=7b^2\equiv 3 \pmod{197}$,勒让得符号:

$$\left(\frac{7b^2}{197}\right)=\left(\frac{7}{197}\right)=\left(\frac{197}{7}\right)=\left(\frac{1}{7}\right)=1$$

而$\left(\frac{3}{197}\right)=-1$,前后矛盾,所以在情形Ⅶ时,式(5)无解.

情形Ⅷ:当 $2\mid x$ 时,a 为奇数,有 $a^2\equiv 1 \pmod 8$,由第一式可得 $x\equiv 0 \pmod 8$,代入第二式得 $1\equiv x^2+x+1=21b^2\equiv 5 \pmod 8$,矛盾. 当 $2\nmid x$ 时,a 为偶数,有 $a^2\equiv 0 \pmod 4$,由第一式可得 $x\equiv 1 \pmod 4$,代入第二式得 $3\equiv x^2-x+1=21b^2\equiv 1 \pmod 4$,也矛盾. 故在情形Ⅷ时式(5)无解.

情形Ⅵ:第二式化为$(2b)^2-3\left(\frac{2x+1}{3}\right)^2=1$,第一式代入得$(2b)^2-3(2\ 758a^2+1)^2=1$. 因此有:

$$2b+(2758a^2+1)\sqrt{3}=$$
$$\pm(r_n+s_n\sqrt{3})=\pm(2+\sqrt{3})^n$$

其中 $n\in\mathbf{Z}$,$2+\sqrt{3}$是 Pell 方程 $r^2-3s^2=1$ 的基本解,因此有 $2\ 758a^2=\pm s_n-1$,$n\in\mathbf{Z}$. 又因为 $s_{-n}=-s_n$,所以只需考虑 $2\ 758a^2=s_n-1$. 当 $2\mid n$时,由引理 1 知 $2\mid s_n$,则 $2\ 758a^2=s_n-1$ 不可能成立. 又当 $n\equiv 1 \pmod 4$,$s_n\equiv 1 \pmod 8$,则 $2\ 758a^2\equiv 2 \pmod 8$,也不可能,故必须 $n\equiv 3\equiv -1 \pmod 4$. 令 $n=4m-1$,有

$$2\ 758a^2=s_{4m-1}-1=-r_{4m}+2s_{4m}-1=-(r_{2m}^2+3s_{2m}^2)+$$
$$4r_{2m}s_{2m}-1=2r_{2m}(-r_{2m}+2s_{2m})=$$
$$2r_{2m}s_{2m-1}$$

也即

$$1\ 379a^2=r_{2m}s_{2m-1} \tag{6}$$

又因为$(r_{2m},s_{2m-1})=(r_{2m},-r_{2m}+2s_{2m})=(r_{2m},2s_{2m})=1$,如果 $r_n\equiv 0 \pmod{197}$,则 $3s_n^2\equiv -1 \pmod{197}$,但$\left(\frac{3}{197}\right)=-1$,$\left(\frac{-1}{197}\right)=1$,矛盾,故 $197\nmid fr_n$. 则式(6)有以下分解:

$$r_{2m}=c^2,s_{2m-1}=1\ 379d^2,a=cd \tag{7}$$

$$r_{2m}=7c^2,s_{2m-1}=1\ 97d^2,a=cd \tag{8}$$

其中 $c\geqslant 0,d\geqslant 0,\gcd(c,d)=1$. 把式(7)的第一式代入 $r_{2m}^2-3s_{2m}^2=1$ 中,得 $c^4-3s_{2m}^2=1$.

由引理 3 知$(r_m,s_m)=(c^2,s_{2m})=(1,0)$,则 $m=0$,得到 $s_{2m-1}=s_{-1}=-1$,这不符合式(7)中的第二式,故式(7)无解. 则此情形式(5)无解.

把式(8)的第二式代入 $r_{2m-1}^2-3s_{2m-1}^2=1$ 中得 $r_{2m-1}^2-591d^4=1$. 因 $r_{2m-1}^2-591d^2=1$ 的整数解为$(1,0)$,则 $r_{2m-1}^2-591d^4=1$ 只有整数解$(r_{2m-1},d^2)=(1,0)$,故 $d=0$,则 $a=0$,从而得到式(5)的平凡解$(x,y)=(1,0)$.

综上所述,不定方程 $x^3-1=1\ 379y^2$ 仅有情形Ⅵ

给出的平凡整数解(1,0),证毕.

3　程序算法验证

用 MATLAB 程序算法验证不定方程 $x^3+1=1\ 379y^2$ 的整数解,运算结果如图 1 所示. 用 MATLAB 程序算法验证不定方程 $x^3-1=1\ 379y^2$ 的整数解,运算结果如图 2 所示.

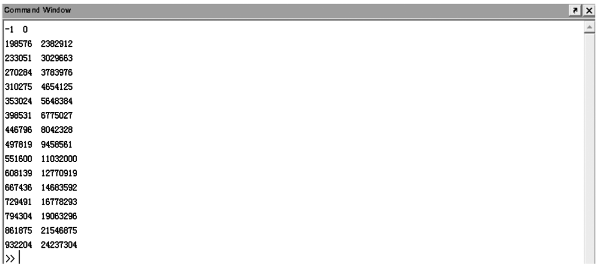

图 1　方程 $x^3+1=1\ 379y^2$ 程序运行结果

Fig. 1　Running results of equation $x^3+1=1\ 379y^2$ program

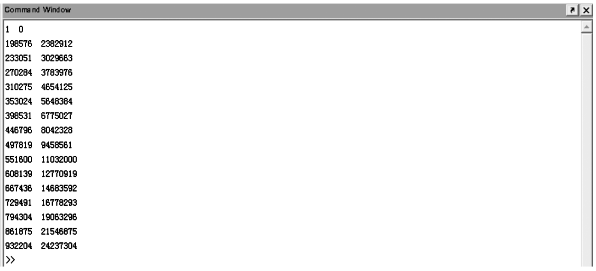

图 2　方程 $x^3-1=1\ 379y^2$ 程序运行结果

Fig. 2　Running results of equation $x^3-1=1\ 379y^2$ program

4　结束语

对于形如 $x^3 \pm 1 = Dy^2(D>0)$ 的不定方程,利用同余理论、递归序列以及 Pell 方程解的性质,给出了当 $D=1\ 379$ 时不定方程的整数解,所使用的代数方法可以推广到求解大系数的三次不定方程中去. 对原方程进行因子分解后得到的分解式,本文通过代入已解决的 Pell 方程通解,利用其递归关系来确定原方程的解.

对不定方程解法的研究对组合数学、代数数论和有限群论等数学分支的发展都起到一定的推动作用. 不管是初等解法还是高等解法,都具有很强的技巧性,因此相关的工作可以归纳总结出更加巧妙的方法,丰富这一领域的理论研究.

参考文献(References):

[1]　柯召,孙琦. 谈谈不定方程[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2011

KE Z, SUN Q. About Diophantine Equation [M]. Harbin: Harbin University of Technology Press, 2011(in Chinese)

[2]　曹珍富. 丢番图方程引论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1989

CAO Z F. Introduction to Diophantine Equations [M]. Harbin: Harbin Institute of Technology Press, 1989 (in Chinese)

[3]　罗明. 关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 14y^2$[J]. 重庆交通学院学报(自然科学版),1995,14(3):112—116

LUO M. On the Indeterminate Equation $x^3 \pm 1 = 14y^2$[J]. Journal of Chongqing Jiaotong University(Natural Science Edition),1995, 14(3): 112—116(in Chinese)

[4]　邱克娥,雍进军,陶磊,等. 不定方程 $x^3+1=333y^2$ 的整数解[J]. 凯里学院学报(自然科学版),2018,36(6):22—24

QIU K E, YONG J J, TAO L, et al. The Integral Solutions of Diophantine Equation $x^3+1=333y^2$ [J]. Journal of Kaili University (Natural Science Edition), 2018, 36(6): 22—24(in Chinese)

[5]　周科. 关于不定方程 $x^3+1=1\ 043y^2$[J]. 广西师范学院学报(自然科学版),2018,35(1):28—30

ZHOU K. On the Indefinite Equation $x^3+1=1\ 043\ y^2$ [J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science Edition), 2018,35(1):28—30(in Chinese)

[6]　过静,赵建红,杜先存. 关于 Pell 方程组 $x^2-3y^2=1$ 与 $y^2-Dz^2=1$ 的解[J]. 数学的实践与认识,2017,47(20):265—269

GUO J, ZHAO J H, DU X C. On the Pell Equations $x^3-3y^2=1$ and $y^2-Dz^2=1$[J]. Practice and Understanding of Mathematics, 2017, 47 (20): 265—269(in Chinese)

[7]　杜先存,万飞,赵金娥. 关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 1\ 455y^2$ 的一个初等解法[J]. 西南大学学报(自然科学版),2014,36(4):43—46

DU X C, WAN F, ZHAO J E. On a Primary Solution of the Indefinite Equation $x^3 \pm 1 = 1\ 455y^2$ [J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2014, 36 (4): 43—46(in Chinese)

[8] 高丽,鲁伟阳,郝虹斐. 不定方程 $x^3+1=301y^2$ 的整数解[J]. 广西科学,2014,21(3):290—292

GAO L, LU W Y, HAO H F. The Integer Solutions of Diophantine Equation $x^3 + 1 = 301y^2$ [J]. Guangxi Science, 2014, 21 (3): 290—292(in Chinese)

[9] 高丽,胡江美. 不定方程 $x^3+1=2\ 019y^2$ 的整数解[J]. 延安大学学报(自然科学版),2019,38(2):8—11

GAO L, HU J M. On the Integer Solution of the Indefinite Equation $x^3 + 1 = 2\ 019y^2$ [J]. Journal of Yan' an University(Natural Science Edition), 2019, 38 (2): 8—11(in Chinese)

[10] 鲁伟阳,高丽,郝虹斐. 关于不定方程 $x^3-1=301y^2$ 整数解的讨论[J]. 云南民族大学学报(自然科学版),2013,22(4):264—265

LU W Y, GAO l, HAO H F. Integer Solutions of Diophantine Equation $x^3 - 1 = 301y^2$ [J]. Journal of Yunnan University for Nationalities (Natural Science Edition),2013, 22(4):264—265(in Chinese)

[11] 李润琪. 不定方程 $x^3-1=PQy^2$ 的整数解[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2015,32(9):45—47.

LI R Q. On Integer Solution to the Indefinite Equation $x^3 - 1 = PQy^2$ [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2015, 32 (9):45—47(in Chinese)

On the Diophantine Equation $x^3 \pm 1 = 1\ 379\ y^2$

CAO Rui, LUO Ming

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: There is no general conclusion about the solution of $x^3 \pm 1 = Dy^2$ ($D>0$) type Diophantine equation. The solvability of $x^3 \pm 1 = Dy^2$ for Diophantine equation when $D = 1379$ is studied. By using congruence, recursive sequence, quadratic remainder and some properties of solutions of Pell equations, it is proved that the Diophantine equation $x^3+1=1379y^2$ has only integer solutions $(x, y) = (-1, 0)$, and that the Diophantine equation $x^3-1=1379y^2$ has only integer solutions $(x, y) = (1, 0)$. The algebraic method used can be extended to solve cubic Diophantine equations with large coefficients.

Key words: Diophantine equation; positive integer solution; recursive sequence; congruence

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

曹瑞,罗明. 关于不定方程 $x^3 \pm 1 = 1379y^2$[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(4):118—122

CAO R, LUO M. On the Diophantine Equation $x^3 \pm 1 = 1\ 379y^2$[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(4):118—122