doi:10.16055/j. issn. 1672-058X. 2020. 0004. 012

第一类卷积型 Volterra 积分方程的快速配置边值方法*

刘 玲, 杨 镇
(贵州大学 数学与统计学院, 贵阳 550025)

摘 要:针对第一类卷积型 Volterra 积分方程的数值解,研究其快速算法;基于特殊的多步配置方法,利用未计算的近似值,构造了高阶数值格式;通过格式,将原积分方程离散为线性方程组,其中系数矩阵可分解为 Toeplitz 矩阵和稀疏矩阵;利用快速 Fourier 变换计算该线性方程组,运算量为 $O(N\log N)$;数值例子验证了方法的高效性。

关键词:Volterra 积分方程;配置边值法;Toeplitz 矩阵;快速 Fourier 变换

中图分类号:O242.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)04-0083-06

0 引 言

研究第一类卷积型 Volterra 积分方程的快速算法,其形式如下:

$$\int_0^t K(\omega(t-s))u(s)\,\mathrm{d}s=f(t),\quad t\in I:=[0,T],T<\infty \tag{1}$$

其中,$u(t)$是未知函数,$\omega>0$,$K(\omega(t-s))$为核函数且在 $D:=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant T\}$ 上连续,$f(t)$充分光滑,满足$f(0)=0$。令 $G(t,s)=K(\omega(t-s))$,如果$|G(t,t)|>0$,$G(t,s)\in C(D)$且 $\partial G(t,s)/\partial t\in C(D)$,那么当$f(0)=0$且$f(t)\in C^1(I)$时,方程(1)存在唯一解 $u\in C(I)$[1]。

在物理学、工程等领域的诸多问题最终都可以转化为第一类卷积型 Volterra 积分方程的求解[2-4]。例如,对于二维声学散射问题中的单层势能积分方程:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{R^2}\frac{u(|x'|,t-|x-x'|)}{|x-x'|}\mathrm{d}x=a(x,t)$$
$$(x,t)\in R^2\times(0,T)$$

当$t\leqslant 0$,满足$u\equiv 0$,$a\equiv 0$时,上式可以利用连续 Fourier 变换转化为带 Bessel 核的第一类卷积型 Volterra 积分方程:

$$\int_0^t J_0(\omega(t-s))u(s)\,\mathrm{d}s=f(t),\quad t\in I:=[0,T],T<\infty \tag{2}$$

其中,$J_0(\cdot)$表示第一类 0 阶 Bessel 函数。

通常方程式(1)的解析解很难求出,因此研究该方程的数值求解方法具有重要意义。迄今为止,国内外研究者提出和改进了很多有效求解 Volterra 积分方程数值解的方法。1987 年,Mcalevey[5] 基于矩形求积法则和中点求积法则求解第一类 Volterra 积分方程,并讨论了其误差的渐进展开式。2004 年,Davies 和 Duncan[6] 讨论了配置法求解方程式(2),利用梯形求积公式近似计算矩积分。2009 年,

收稿日期:2019-10-17;**修回日期**:2019-11-16.
* **基金项目**:国家自然科学资助项目(11901133).
作者简介:刘玲(1995—),女,贵州湄潭人,硕士研究生,从事振荡积分的数值计算方法研究.

Brunner 等[7]针对方程式(2)提出了高精度的间断 Galerkin 方法,并推导了其解析解的表达式。2009 年,Wang 和 Xiang[8]通过分析含 Bessel 函数的振荡积分的渐进性质,推导了方程式(2) 精确解的渐进展开式,并通过 Filon 型方法来求解其近似解。2011 年,Chen 和 Zhang[9]利用线性多步法,推导了特殊的求积法则,进而构造了求解 Volterra 积分方程的边值方法。2013 年,Xiang 和 Brunner[10]讨论了高效能的 Filon 配置方法求解 Volterra 积分方程。2014 年,Xiang[11]基于 Laplace 变换和 Laplace 逆变换推导了积分方程式(2)的显示表达式,并利用 Clenshaw - Curtis - Filon 型方法来求解其近似解。2019 年,Li、Xiang 等[12]研究了带有高振荡核的第一类 Volterra 积分方程的数值解,利用 Laplace 变换和 Laplace 逆变换推导了积分方程式(1)的另一显示表达式,并使用 Clenshaw-Curtis-Filon 和 Clenshaw-Curtis-type 等方法求解其近似解。2017 年,Xiang[13]等讨论了求解滞后势能积分方程的有效数值方法,通过连续 Fourier 变换将滞后势能积分方程转化为积分方程式(2),然后利用 Clenshaw-Curtis 型方法来求解其近似解。2017 年,Ma 和 Xiang[14]研究了求解 Volterra 积分方程的配置边值方法,并分析了其线性稳定性。2019 年,Ma 和 Liu[15]研究了求解带弱奇异核的第二类 Volterra 方程,利用分数阶 Lagrange 插值多项式离散 Volterra 积分方程,构造了分数阶配置边值方法。数值实验表明,上述方法对求解 Volterra 积分方程是高效的。

由于配置边值法在求解 Volterra 积分方程时,不需要增加配置点就可以得到其误差的高阶收敛且具有较好的稳定性,所以研究求解方程式(1)的配置边值方法。具体内容如下:第 1 节构造配置边值方法,用方法将积分方程式(1)离散为线性方程组,并将线性方程组的系数矩阵分解为 Toeplitz 矩阵[16]和稀疏矩阵,进而实现线性方程组的快速计算;第 2 节通过数值例子验证数值方法的高效性。

1 快速配置边值方法

对区间$[0,T]$作等距网格划分

$$I_h=\{t_n:t_n=nh,n=0,1,\cdots N,h=\frac{T}{N}\}$$

定义 $X_h=I_h\setminus\{0\}$,在区间$[t_n,t_{n+1}]$上,选取 t_{n+1} 后的 k 个节点为配置点,定义基函数

$$\phi_j^k(s)=\prod_{i=0,i\neq j}^{k+1}\frac{s-i}{j-i}$$

则在区间$[t_n,t_{n+1}]$上定义近似解 u_h 为

$$u_h(t_n+sh)=\sum_{i=0}^{k+1}y_{n+i}\phi_i^k(s)$$

$$n=0,1,\cdots,N-k-1$$

在区间$[t_{N-k},t_N]$上定义近似解 u_h 为

$$u_h(t_{N-1-k}+sh)=\sum_{i=0}^{k+1}y_{N-1-k+i}\phi_i^k(s)$$

其中,$y_n:=u_h(t_n)$表示 $u(t_n)$的近似值。因此,方程式(1)的近似解 u_h 满足下列配置方程

$$\int_0^t K(\omega(t-s))u_h(s)\mathrm{d}s=f(t),t\in X_h \tag{3}$$

得到了 k 步配置边值方法(CBVM-k),通过求解上述线性系统,可以得到方程式(1)的配置边值解。

特别地,对于 CBVM-1,在子区间$[t_n,t_{n+1}]$上的近似解 u_h 为

$$\begin{cases}u_h(t_n+sh)=y_n\phi_0^1(s)+y_{n+1}\phi_1^1(s)+\\ y_{n+2}\phi_2^1(s),n<N-2\\ u_h(t_{N-2}+sh)=y_{N-2}\phi_0^1(s)+y_{N-1}\phi_1^1(s)+\\ y_N\phi_2^1(s),n=N-2,N-1\end{cases}$$

定义

$$\alpha_{i,j}^{\tau}=\int_0^1 K(ih-sh)\phi_\tau^1(s)\mathrm{d}s$$

和

$$\beta_{i,j}^{\tau}=\int_1^2 K(ih-sh)\phi_\tau^1(s)\mathrm{d}s$$

其中 $i=1,2,\cdots,N,j=1,2,\cdots,N+1,\tau=0,1,2$。则可以构造 $N\times N$ 阶矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}-\boldsymbol{R}$$

其中 $\boldsymbol{T}$ 为 $N\times N$ 阶 Toeplitz 矩阵,$\boldsymbol{R}$ 为 $N\times N$ 阶稀疏矩阵。$\boldsymbol{T}$ 的第一行和第一列分别为 t_1 和 t_2,这里

$$t_1=(\alpha_{1,2}^1+\alpha_{2,2}^2 \quad \alpha_{1,3}^2 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 0)$$

$$t_2=(\alpha_{1,2}^1+\alpha_{2,2}^2 \quad \alpha_{1,2}^0+\alpha_{2,2}^1+\alpha_{3,2}^2 \quad \alpha_{2,2}^0+\alpha_{3,2}^1+ \alpha_{4.2}^2\cdots\boldsymbol{T}_{N-1,1} \quad \boldsymbol{T}_{N,1})^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{R}=\begin{pmatrix} \alpha_{2,2}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{3,2}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{4,2}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{N,2}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & -\beta_{2,N-1}^0 & \alpha_{1,N}^0-\beta_{2,N}^1 & \alpha_{1,N+1}^1-\beta_{2,N+1}^2 \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{T}_{N-1,1}=\alpha_{N-2,2}^0+\alpha_{N-1,2}^1+\alpha_{N,2}^2$$

$$\boldsymbol{T}_{N,1}=\alpha_{N-1,2}^0+\alpha_{N,2}^1$$

因此,配置方程(3)转化为矩阵形式

$$h\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_h=\boldsymbol{r} \tag{4}$$

其中

$$\boldsymbol{r}^{\mathrm{T}}=[f(h)-hf'(0)\alpha_{1,1}^0,f(2h)-hf'(0)\alpha_{2,1}^0 ,\cdots f(h)-hf'(0)\alpha_{N,1}^0]$$

和

$$\boldsymbol{u}_h^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{u}_h(h),\boldsymbol{u}_h(2h),\cdots,\boldsymbol{u}_h(T)]$$

利用广义极小残量(GMRES)法求解式(4)。由于 GMRES 主要的运算量是矩阵乘以向量,所以对于 Toeplitz 线性方程组,将 Toeplitz 矩阵嵌套在一个循环矩阵中,即有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{T} & \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{X} & \boldsymbol{T} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{u}_h \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_h \\ \dagger \end{pmatrix}$$

从而可得到循环矩阵的生成元,然后利用快速 Fourier 方法计算 $\boldsymbol{T}\boldsymbol{u}_h$,只需要 $O(N\log N)$ 的运算量;对于稀疏线性方程组,直接用稀疏矩阵乘以向量,只需要 $O(N)$ 的运算量。因此计算式(4) 的运算量只需要 $O(N\log N)$。

2　实例分析与应用

针对初值方法(IVM)和 CBVM 做比较,其中初值方法如下:在区间$[t_n,t_{n+1}]$上,选取 t_{n+1} 的前 k 个节点为配置点,定义基函数

$$L_j(s)=\prod_{i=0,i\neq j}^{k}\frac{s-i}{j-i}$$

则在区间$[t_n,t_{n=1}]$上定义近似解 u_h 为

$$u_h(t_n+sh)=\sum_{i=0}^{k}y_{n+i}L_i(s),n=0,\cdots N$$

因此,方程式(1)的近似解 u_h 满足下列配置方程

$$\int_0^t K(\omega(t-s))u_h(s)\mathrm{d}s=f(t),t\in X_h$$

通过求解上述线性系统,得到方程式(1)的配置解。

通过两个数值例子验证 CBVM 求解方程式(1)的高效性。数值实验都是在 Matlab R2018a 中实现的,其中积分的计算采用 Matlab 中自带的积分程序 quadgk 函数。

例 1　求解积分方程

$$\int_0^t J_0(\omega(t-s))u(s)\mathrm{d}s=\sin t,t\in[0,1]$$

其解析解[7]是

$$u(t)=\cos(t)+\omega\int_0^t\frac{J_1(\omega(t-s))}{t-s}\sin(s)\mathrm{d}s$$

对区间[0,1]作等距划分,选取不同的 ω 和不同的 N,对于 IVM、CBVM-1 和 CBVM-2 得到的配置方程绝对误差的无穷范数分别见表 1、表 2,图 1、图 2 给出了两种方法的 CPU 时间。

表 1　IVM 和 CBVM 绝对误差的无穷范数 (ω=1)

Table 1　Comparisons of infinite norms of absolute errors between IVM and CBVM(ω=1)

N	IVM	CBVM-1	CBVM-2
8	2.0×10^{-1}	7.1×10^{-2}	5.3×10^{-2}
16	9.8×10^{-2}	1.2×10^{-2}	8.1×10^{-3}
32	4.8×10^{-2}	4.6×10^{-4}	2.2×10^{-4}
64	2.0×10^{-5}	7.1×10^{-7}	1.6×10^{-7}
128	5.1×10^{-6}	1.9×10^{-8}	1.1×10^{-10}
256	1.3×10^{-6}	2.4×10^{-9}	7.1×10^{-12}

表 2 IVM 和 CBVM 绝对误差的无穷范数(ω=20)

Table 2 Comparisons of infinite norms of absolute errors between IVM and CBVM (ω=20)

N	IVM	CBVM-1	CBVM-2
8	3.1×10^{-1}	1.1×10^{-1}	4.3×10^{-2}
16	1.2×10^{-1}	1.5×10^{-2}	5.2×10^{-3}
32	5.2×10^{-2}	1.9×10^{-3}	5.4×10^{-4}
64	8.0×10^{-3}	2.3×10^{-4}	4.2×10^{-5}
128	2.0×10^{-3}	2.8×10^{-5}	2.7×10^{-6}
256	5.0×10^{-4}	3.6×10^{-6}	1.7×10^{-7}

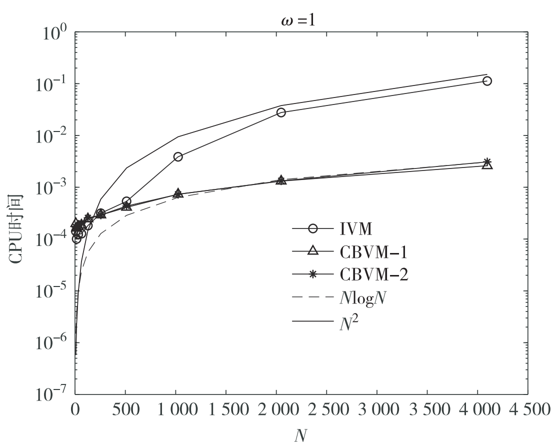

图 1 CBVM 和 IVM 的 CPU 时间(W:1)

Fig. 1 CPU time of CBVM and IVM(W:1)

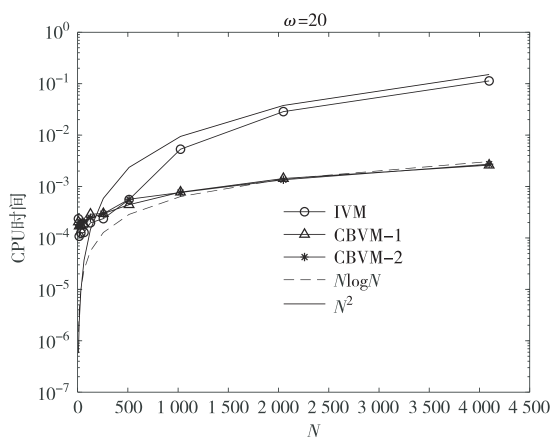

图 2 CBVM 和 IVM 的 CPU 时间(W:20)

Fig. 2 CPU time of CBVM and IVM(W:20)

例 2 求解积分方程

$$\int_0^t e^{\omega(t-s)}u(s)\,\mathrm{d}s = te^t, t \in [0,1]$$

易验证其解析解是

$$u(t)=e^t+(1-\omega)te^t$$

对区间[0,1]作等距划分,选取不同的 ω 和不同的 N,对于 IVM、CBVM-1 和 CBVM-2 得到的配置方程绝对误差的无穷范数分别见表 3、表 4,图 3、图 4 给出了 CBVM 和 IVM 的 CPU 时间。

表 3 IVM 和 CBVM 绝对误差的无穷范数(ω=1)

Table 3 Comparisons of infinite norms of absolute errors between IVM and CBVM (ω=1)

N	IVM	CBVM-1	CBVM-2
8	3.0×10^{-1}	9.9×10^{-2}	8.3×10^{-2}
16	1.3×10^{-1}	1.5×10^{-2}	1.1×10^{-2}
32	6.6×10^{-2}	5.8×10^{-4}	2.9×10^{-4}
64	3.2×10^{-4}	1.3×10^{-6}	2.2×10^{-7}
128	7.9×10^{-5}	1.6×10^{-7}	1.3×10^{-9}
256	1.9×10^{-5}	2.1×10^{-8}	7.8×10^{-11}

表 4 IVM 和 CBVM 绝对误差的无穷范数(ω=20)

Table 4 Comparisons of infinite norms of absolute errors between IVM and CBVM(ω=20)

N	IVM	CBVM-1	CBVM-2
8	2.0×10^{2}	4.9×10^{1}	1.2×10^{0}
16	2.1×10^{1}	3.1×10^{-2}	5.3×10^{-1}
32	1.1×10^{1}	1.0×10^{-2}	1.6×10^{-2}
64	6.7×10^{-1}	7.5×10^{-5}	3.8×10^{-5}
128	5.9×10^{-1}	6.4×10^{-5}	2.9×10^{-5}
256	1.5×10^{-1}	9.1×10^{-5}	6.1×10^{-5}

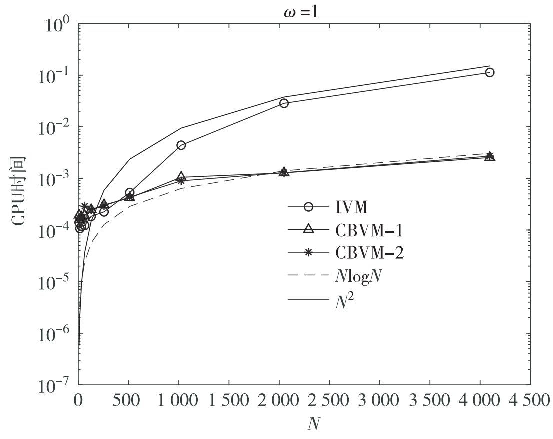

图 3 CBVM 和 IVM 的 CPU 时间(ω=1)

Fig. 3 CPU time of CBVM and IVM(ω=1)

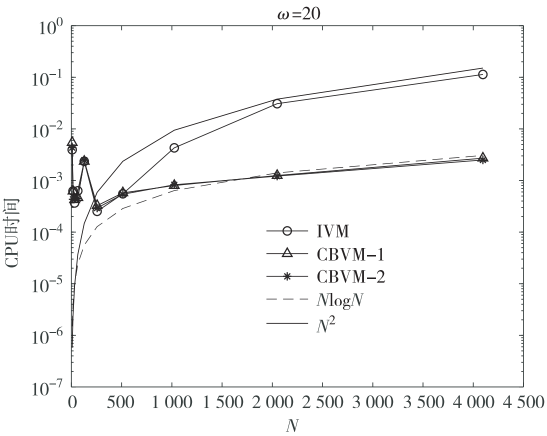

图 4　CBVM 和 IVM 的 CPU 时间($\omega=20$)

Fig. 4　CPU time of CBVM and IVM($\omega=20$)

通过分析表 1—表 4 中的数据可以看出:配置边值方法比初值方法精度更高,配置边值方法随着 N 取值的增大,其误差越来越小,并且随着配置步数 k 的增加,其精度也在增加,表明配置解收敛且方法具有较好的稳定性。但也可以看到随着参数 ω 的增大,其精度在下降。从图 1—图 4 可以看出:用配置边值法求解第一类卷积型积分方程只需 $O(N\log N)$ 的运算量,并且对于求解复杂的大规模问题也是高效的。

3　结　论

基于多步配置方法,通过向后选取节点为配置点,构造了具有较好稳定性的配置边值方法。方法的优点是不需要增加配置点就可得到其误差的高阶收敛。利用方法求解第一类卷积型 Volterra 积分方程,只需 $O(N\log N)$ 的运算量,因此,配置边值方法是求解 Volterra 积分方程的高效数值方法。

参考文献(References):

[1] BRUNNER H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations [M]. London: Cambridge University Press, 2004

[2] BAMBERGER A, DUONG T H. Formulation Variationnelleespace-temps Pour Le Calcul Par Potentielretardé De La Diffraction duneondeacoustique [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2011,8(1):405—435

[3] HADUONG T. On the Transient Acoustic Scattering by a Flat Object [J]. Japan Journal of Applied Mathematics, 1990, 7(3):489—513

[4] HA D T. On Retarded Potential Boundary Integral Equations and Their Discretisation [J]. Topics in Computational Wave Propagation,2003(18):2018—2022

[5] MCALEVEY L G. Product Integration Rules for Volterra Integral Equations of the First Kind [J]. BIT Numerical Mathematics, 1987, 27(2):235—247

[6] DAVIES P J, DUNCAN D B. Stability and Convergence of Collocation Schemes for Retarded Potential Integral Equations [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2004, 42(3):1167—1188

[7] BRUNNER H, DAVIES P J, DUNCAN D B. Discontinuous Galerkin Approximations for Volterra Integral Equations of the First Kind[J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2009,29(4):856—881

[8] WANG H, XIANG S. Asymptotic Expansion and Filon-type Methods for a Volterra Integral Equation with a Highly Oscillatory Kernel [J]. IMA Journal of Numerical Analysis, 2011, 31(2):469—490

[9] CHEN H, ZHANG C. Boundary Value Methods for Volterra Integral and Integro-differential Equations [J]. Applied Mathematics Computation, 2011, 218 (6): 2619—2630

[10] XIANG S, BRUNNER H. Efficient Methods for Volterra Integral Equations with Highly Oscillatory Bessel Kernels [J]. BIT Numerical Mathematics, 2013, 53 (1): 241—263

[11] XIANG S. Laplace Transforms for Approximation of Highly Oscillatory Volterra Integral Equations of the First Kind [J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232(12):944—954

[12] LI B,XIANG S,LIU G. Laplace Transforms for Evaluation of Volterra Integral Equation of the First Kind with Highly OS cillatory Kernel [J]. Computational and Applied Mathematics,2019,38(3):116

[13] XIANG S, LI B, LIU G. On Efficient Computation of Highly Oscillatory Retarded Potential Integral Equations [J]. International Journal of Computer Mathematics,2017 (1):16—22

[14] MA J, XIANG S. A Collocation Boundary Value Method for Linear Volterra Integral Equations [J]. Journal of Scientific Computing, 2017, 71(1):1—20

[15] MA J, LIU H. Fractional Collocation Boundary Value Methods for the Second Kind Volterra Equations with Weakly Singular Kernels[J]. Numerical Algorithms,2019 (1):1—18

[16] CHAN R H F, JIN X Q. An Introduction to Iterative Toeplitz Solvers[J]. SIAM,2007(2):221—228

Fast Collocation Boundary Value Method for Convolution-type Volterra Integral Equation of the First Kind

LIU Ling, YANG Zhen

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: This paper is devoted to studying the fast numerical method for convolution-type Volterra integral equation of the first kind. High order numerical schemes are devised by using special multi-step collocation methods, which depend on numerical approximations of the solution in the next several steps. Then the original integral equation is discretized into a system of linear equations, and the coefficient matrix can be decomposed into a Toeplitz matrix and a sparse matrix. The fast calculation of linear equations is implemented by using fast Fourier transform in this paper, and the calculation amount is $O(N\log N)$. Numerical examples are provided to demonstrate the efficiency of the proposed method.

Key words: Volterra integral equation; collocation boundary value method; Toeplitz matrix; fast Fourier transform.

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

刘玲,杨镇. 第一类卷积型 Volterra 积分方程的快速配置边值方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版),2020,37(4):83—88

LIU L,YANG Z. Fast Collocation Boundary Value Method for Convolution-type Volterra Integral Equation of the First Kind[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition),2020,37(4):83—88