

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0004.004

一类非 Shil'nikov 型四维超混沌系统的最终有界*

牛亚星, 杨启贵**

(华南理工大学 数学学院, 广州 510640)

摘要:针对 3D Lorenz 型系统,提出了具有唯一平衡点或两个平衡点的四维超混沌系统,在两种不同平衡点情形下可分别发现超混沌吸引子。通过构造恰当的 Lyapunov 函数严格证明同宿轨与异宿轨的不存在性,表明此系统的超混沌是非 Shil'nikov 意义下的混沌;进一步将 Lyapunov 函数和优化方法有机结合证明超混沌吸引子的最终有界性,并数值模拟验证超混沌吸引子的最终有界;运用相图、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映射分析系统随参数变化的复杂动力学。

关键词:超混沌;混沌;同宿轨;异宿轨;最终有界

中图分类号:O127 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2020)04-0020-08

0 引言

自 1963 年 Lorenz^[1]首次通过数值仿真方法在确定性系统中发现混沌吸引子以来,一些经典的 Lorenz 型系统^[2-4]被提出。由于初值敏感依赖性与随机性,混沌系统呈现出复杂的动力学行为。与混沌系统相比,具有至少两个正的 Lyapunov 指数的超混沌系统呈现出更复杂的动力学性质。1979 年, Rössler^[5]提出了第一个四维超混沌系统,即 Rössler 超混沌系统,它仅有一个非线性项却呈现出高度复杂的混沌行为。此后超混沌系统引起广泛的关注,一些经典的超混沌系统相继被提出:首次电路实现的超混沌 Chua 电路^[6];简单的振荡器模型超混沌 Lorenz-Stenflo 系统^[7];2009 年, Yang^[8]等在三维 Lorenz 型系统基础上设计一个反馈控制器所得的四维超混沌系统;2010 年 Li^[9]等提出并电路实现一个新四维超混沌系统;2015 年 Chen^[10]等获得一个具有平衡点曲线的 Lorenz 型四维超混沌系统;2017

年 Chen^[11]提出具有同宿轨的四维 Lorenz 型超混沌系统等。这些系统在生物神经网络、保密通讯、非线性电路、图像加密和控制同步^[12]等领域有重要的应用前景。

同宿轨与异宿轨是通向混沌的一条重要路径^[13]。Shil'nikov 准则是证明混沌存在性的经典方法^[14],而同宿轨或异宿轨的存在性是 Shil'nikov 准则的关键条件。在四维系统中证明同宿轨与异宿轨的存在性仍是具有挑战性的问题。从全局动力学分析,获得超混沌吸引子的最终有界集,对于精确刻画吸引子的边界及位置十分重要。Li^[13]等通过构造 Lyapunov 函数估计了一个超混沌系统的全局吸引集与正不变集;Wang^[15]等不仅获得了一个新的超混沌系统的最终有界集而且估计该系统的 Hausdoff 维数。在一个特定的四维超混沌系统中构造恰当的 Lyapunov 函数估计吸引子的最终有界集具有重要意义。

本文提出了一个具有一个平衡点或两个平衡点的新四维超混沌系统,不仅从局部对平衡点稳定

收稿日期:2019-11-05;修回日期:2019-12-20.

* 基金项目:国家自然科学基金项目资助(11671149).

作者简介:牛亚星(1993—),女,河南开封人,硕士研究生,从事混沌动力学研究.

** 通讯作者:杨启贵(1965—),男,重庆市人,教授,博士,从事混沌动力学研究. Email:qgyang@scut.edu.cn.

性、同宿轨与异宿轨的存在性等复杂动力学行为进行分析,严格证明同宿轨与异宿轨的不存在性,说明该系统为非 Shil'nikov 意义下的混沌,而且从全局的角度将 Lyapunov 函数与优化方法相结合构造超混沌吸引子的最终有界集,借助相图、Lyapunov 指数谱、分岔图和 Poincaré 映射分析超混沌系统的复杂动力学。

1 新四维超混沌系统

基于 Lorenz 型系统^[4]:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1x + a_2y \\ \dot{y} = bx - cy - xz \\ \dot{z} = -ez + xy \end{cases} \quad (1)$$

在第三个方程上增加一个常数项 d , 第二个方

程上增加一个线性反馈控制项 w , 得到一个新的四维超混沌系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -a_1x + a_2y \\ \dot{y} = bx - cy - xz + w \\ \dot{z} = d - ez + xy \\ \dot{w} = -fx + mz \end{cases} \quad (2)$$

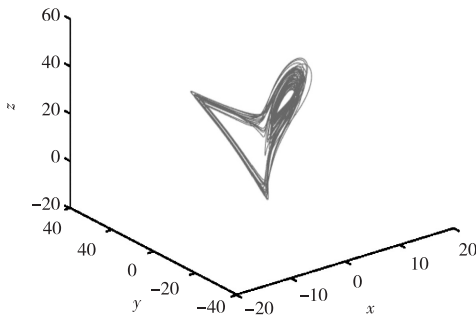
其中, 参数 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) \in \mathbf{R}^8$ 。当 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$, 初始值为 $(1, 1, 1, 1)$ 时, 式(2)有一个超混沌吸引子, 在此参数下的 Lyapunov 指数为

$$\lambda_{LE_1} = 0.188\ 6, \lambda_{LE_2} = 0.083\ 4$$

$$\lambda_{LE_3} = -0.000\ 0, \lambda_{LE_4} = -10.472\ 0$$

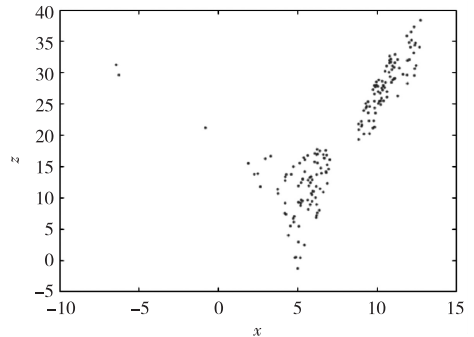
超混沌吸引子的相图和 Poincaré 映射如图 1 所示。

所示。



(a) 相图

(a) Phase portrait



(b) Poincaré 映射

(b) Poincaré mapping

图 1 式(2)在 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$ 下的超混沌吸引子

Fig. 1 The system (2) has a hyperchaotic attractor under $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

2 平衡点稳定性分析

平衡点反映出系统的局部特征,为了得到系统的平衡点,计算下面的方程:

$$\begin{cases} -a_1x + a_2y = 0 \\ bx - cy - xz + w = 0 \\ d - ez + xy = 0 \\ -fx + mz = 0 \end{cases} \quad (3)$$

1) 当 $\left(\frac{ef}{m}\right)^2 - \frac{4a_1d}{a_2} > 0$ 时, 式(2)有两个对称平衡

点 $E_{\pm} \left(\frac{a_2ef}{2a_1m}, \frac{ef}{2m}, \frac{a_2ef^2}{2a_1m^2}, \frac{a_2e^2f^3}{4a_1^2m^3} + \left(\frac{a_1c}{a_2} - b\right) \frac{a_2ef}{2a_1m} \right)$ 。当 $(a_1,$

$a_2, b, c, d, e, f, m) = (7, 7, 36, 1, 3.24, 3.6, 7.2, 2)$, 在平衡点 E_1 附近有一个超混沌吸引子如图 2 所示。

2) 当 $\left(\frac{ef}{m}\right)^2 - \frac{4a_1d}{a_2} > 0$ 时, 式(2)有两个对称平衡

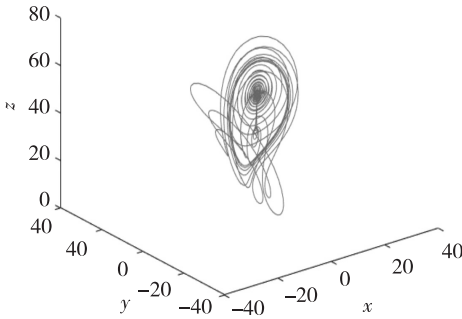
点 $E_{\pm} \left(x_{\pm}, \frac{a_1}{a_2}x_{\pm}, \frac{f}{m}x_{\pm}, \frac{f}{m}x_{\pm}^2 + \left(\frac{a_1c}{a_2} - b\right)x_{\pm} \right)$ 。其中

$$x_{\pm} = \frac{a_2ef \pm \sqrt{(a_2ef)^2 - 4a_1m^2d}}{2a_1m}$$

当 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$ 时, 在平衡点 E_{\pm} 附近有一个超混沌吸引子如图 1 所示。

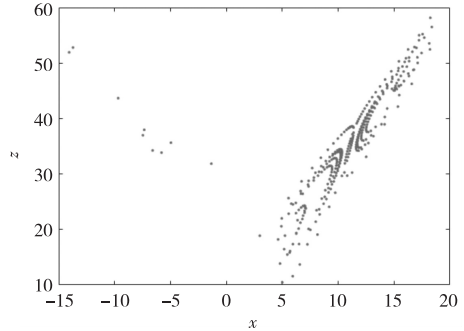
3) 当 $\left(\frac{ef}{m}\right)^2 - \frac{4a_1d}{a_2} < 0$ 时, 式(2)没有平衡点。

$(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 6, 38, 1, 3.25, 3.6, 7.2, 2)$, 3 所示。
 2), 式(2)没有平衡点, 但有一个超混沌吸引子如图



(a) 相图

(a) Phase portrait

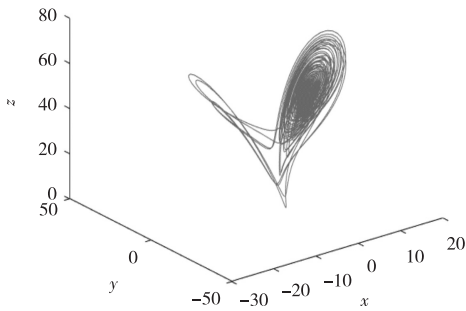


(b) Poincaré 映射

(b) Poincaré mapping

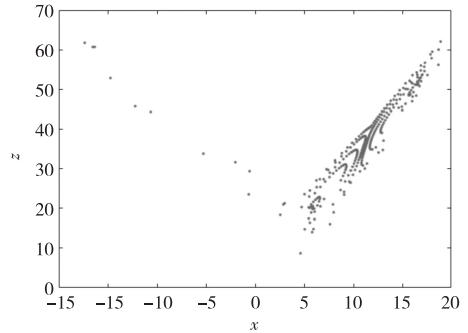
图 2 式(2)在 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (7, 7, 36, 1, 3.24, 3.6, 7.2, 2)$ 下的超混沌吸引子

Fig. 2 The system (2) has a hyperchaotic attractor under $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (7, 7, 36, 1, 3.24, 3.6, 7.2, 2)$



(a) 相图

(a) Phase portrait



(b) Poincaré 映射

(b) Poincaré mapping

图 3 式(2)在 $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 6, 38, 1, 3.25, 3.6, 7.2, 2)$ 下的超混沌吸引子

Fig. 3 The system (2) has a hyperchaotic attractor under $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 6, 38, 1, 3.25, 3.6, 7.2, 2)$

下面分析平衡点 E_1 的稳定性, 式(2)在 E_1 处的特征方程为

$$P(\lambda) = \lambda(c_0\lambda^3 + c_1\lambda^2 + c_2\lambda + c_3) = 0 \quad (4)$$

其中 $c_0 = 1, c_1 = a_1 + c + e, c_2 = a_1c + a_1e + ce +$

$$\left(\frac{a_2ef}{2a_1m}\right)^2 + a_2\left(\frac{a_2ef^2}{2a_1m^2} - b\right), c_3 = -\frac{a_2ef}{2a_1} + a_2f + \frac{(a_2ef)^2}{a_1m^2} -$$

$a_2eb + a_1ec_0$ 。下面计算:

$$\Delta_1 = c_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 \\ c_3 & c_2 \end{vmatrix}, \Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & 1 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix}$$

若下面条件成立:

$$\begin{cases} c_1 > 0 \\ c_1c_2 - c_3 > 0 \\ c_3 > 0 \end{cases}$$

则有 $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$ 成立, 由 Routh-Hurwitz 准则, 式(4)所有的特征根都具有负实部, 平衡点 E_1 具有三维的稳定流形。否则平衡点 E_1 具有零实部特征根或不稳定流形。同理, 可给出平衡点 E_{\pm} 的稳定性。

3 复杂动力学

通过改变参数值, 式(2)呈现出复杂的动力学行为。固定参数 $(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$, 变化 a_1 的值, 式(2)呈现出周期、混沌、超混沌、混沌的经典变化过程。式(2)的分岔图、Lyapunov 指数谱, 如图 4、图 5 所示。

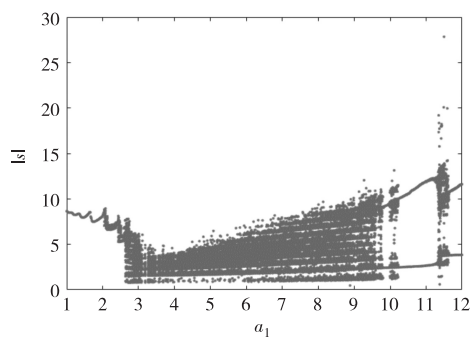
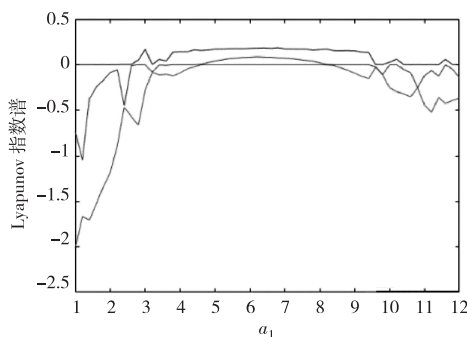
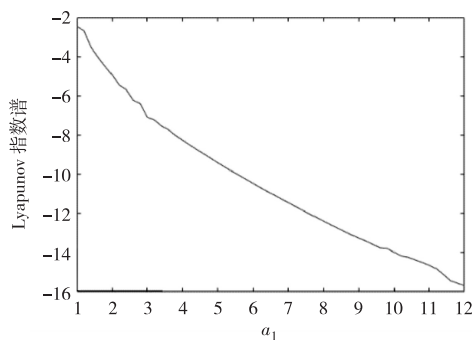


图 4 式(2)的分岔图: $(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$, $a_1 \in [1, 12]$

Fig. 4 Bifurcation diagram of system (2): $(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$, $a_1 \in [1, 12]$



(a) LE_1-LE_3



(B) LE_4

图 5 式(2)的 Lyapunov 指数谱: $(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$, $a_1 \in [1, 12]$

Fig. 5 Lyapunov exponent spectrum of system (2):

$(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$
 $a_1 \in [1, 12]$

变化 a_1 不同吸引子的 Lyapunov 指数, 见表 1。

从表 1 可以看出, 式(2)经历了从周期、混沌、超混沌到混沌的经典变化过程, 系统呈现出复杂动力学行为。特别地, 改变 a_1 的取值, 式(2)对应的相图如图 6、图 7、图 8 和图 9 所示。

表 1 式(2)的 Lyapunov 指数: $(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Table 1 Lyapunov exponent of system (2):

$(a_2, b, c, d, e, f, m) = (5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

a_1	λ_{LE_1}	λ_{LE_2}	λ_{LE_3}	λ_{LE_4}	动力学行为
2	-0.000 0	-0.083 6	-1.184 5	-4.931 9	周期
2.7	0.144 4	-0.000 0	-0.545 0	-6.499 4	混沌
6	0.181 2	0.083 9	-0.000 1	-10.465 0	超混沌
9.7	0.053 0	-0.000 1	-0.241 4	-13.711 4	混沌

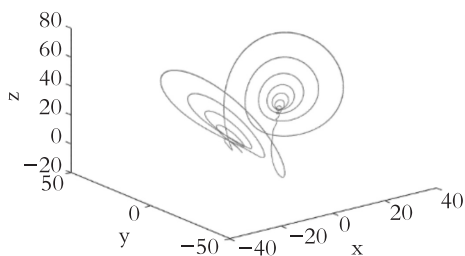


图 6 式(2)的周期吸引子: $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (2, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Fig. 6 Periodic attractor of system (2): $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (2, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

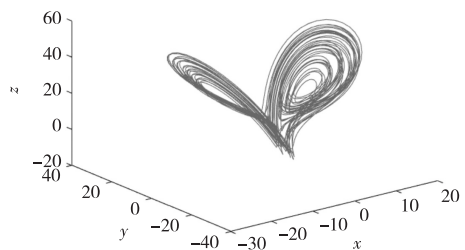


图 7 式(2)的混沌吸引子: $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (2.7, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Fig. 7 Chaotic attractor of system (2): $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (2.7, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

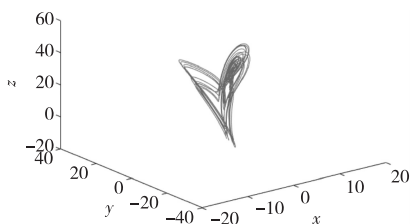


图 8 式(2)的超混沌吸引子: $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Fig. 8 Hyperchaotic attractor of system (2): $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

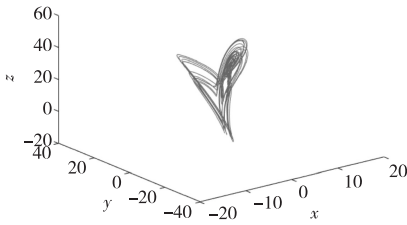


图 9 系统(2)的混沌吸引子: $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (9, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Fig. 9 Chaotic attractor of system (2): $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (9, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

4 同宿轨与异宿轨

本节利用 Lyapunov 函数严格证明式(2)不存在同宿轨与异宿轨,因而该超混沌系统是非 Shil'nikov 型的混沌。

记 $X(t, X_1) = (x(t, X_1), y(t, X_1), z(t, X_1), w(t, X_1))$ 为式(2)满足初始条件 $t=0$ 的解。

$$X_+(t) = (x_+(t), y_+(t), z_+(t), w_+(t))$$

是式(2)在 X_1 处的不稳定流形上的解,且 $\lim_{t \rightarrow +\infty} x_+(t) > 0$; $X_-(t) = (-x_+(t), -y_+(t), z_+(t), -w_+(t))$ 是 $X_+(t)$ 关于 z 轴的另一个解。令 $\lambda_+ = \{X_+(t) | t \in \mathbf{R}\}$ 是式(2)在 X_1 处的+不稳定流形, $\lambda_- = \{X_-(t) | t \in \mathbf{R}\}$ 是式(2)在 X_1 处的-不稳定流形。

定理 1 假设 $a_1, a_2, c, e, 2a_1 - e > 0$, 并令

$$V = a_1 a_2 c^2 (-a_1 x + a_2 y)^2 + \frac{a_1 a_2 e c^2}{2a_1 - e} \left(d - e z + \frac{a_1}{a_2} x^2 \right)^2 + \frac{a_1 a_2 c}{2a_1 - e} (b x - c y - x z + w^2)^2$$

则有下列结论成立:

1) 若存在 $t_1 < t_2$, 使得 $V(t_1, X_1) = V(t_2, X_1)$, 则 X_1 是式(2)的平衡点。

2) 若 $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, X_1) - E_1 = 0$, 且存在 t_3 使得 $x(t_3 - t_0, X_1) > 0$, 则对所有 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $V(E_1) > V(X(t, X_1))$, $x(t, X_1) > 0$ 成立, 因此 $X_1 \in \lambda_+$ 。

证明 1) 沿着式(2)的解 $X(t, X_1)$ 计算 V 函数的偏导数可得:

$$\frac{d}{dt} V(X(t, X_1)) = -2a_1^2 a_2 c^2 (-a_1 x + a_2 y)^2 - \frac{2a_1 a_2 e^2 c^2}{2a_1 - e} \left(d - e z + \frac{a_1}{a_2} x^2 \right)^2 - \frac{2a_1 a_2 c}{2a_1 - e} (b x - c y - x z + w^2)^2 \leq 0$$

在 1) 的条件下, 在 $t \in (t_1, t_2)$ 时, 可得:

$$\begin{cases} -a_1 x(t, X_1) + a_2 y(t, X_1) = 0 \\ b x(t, X_1) - c y(t, X_1) - x(t, X_1) z(t, X_1) + w(t, X_1) = 0 \\ d - e z(t, X_1) + x(t, X_1) y(t, X_1) = 0 \end{cases} \quad (5)$$

根据式(2)与式(5), 对所有 $t \in (t_1, t_2)$ 可得:

$$\dot{x}(t, X_1) = \dot{y}(t, X_1) = \dot{z}(t, X_1) = \dot{w}(t, X_1) = 0$$

因此 E_1 是一个平衡点。

2) 首先用反证法证明对任意 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $V(E_1) > V(X(t, X_1))$ 和 $x(t, X_1) > 0$ 。假设存在某个 $t_* \in \mathbf{R}$, 使得 $V(E_1) \leq V(X(t_*, X_1))$ 成立, 由 1) 得 X_1 是式(2)的一个平衡点, 这与 $\lim_{t \rightarrow +\infty} X(t, X_1) - E_1 = 0$ 和 $x(t_3 - t_0, X_1) > 0$ 矛盾。因此对任意 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $V(E_1) > V(X(t, X_1))$ 成立。

接着用反证法证明对任意 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $x(t, X_1) > 0$ 成立。假设存在一个 $t_4 \in \mathbf{R}$, 使得 $x(t_4, X_1) \leq 0$ 。由于 $x(t_3 - t_0, X_1) > 0$, 故存在 $t_5 \in (t_3 - t_0, t_5]$, 使得 $x(t_5, X_1) = 0$ 。由于对任意 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $V(E_1) > V(X(t, X_1))$ 成立, 那么有

$$X(t_5, X_1) \in \{ (x, y, z, w) | V(x, y, z, w) < V(E_1) \} \cap \{ (x, y, z, w) | x = 0 \}$$

另一方面, 由于

$$\begin{aligned} & \{ (x, y, z, w) | V(x, y, z, w) < V(E_1) \} \cap \\ & \{ (x, y, z, w) | x = 0 \} = \{ (0, y, z, w) | a_1 a_2 c^2 (a_2 y)^2 + \\ & \frac{a_1 a_2 e c^2}{2a_1 - e} (d - e z)^2 + \frac{a_1 a_2 c}{2a_1 - e} (-c y - x z + w^2)^2 < 0 \} = \emptyset \end{aligned}$$

这是矛盾的, 因此对任意 $t \in \mathbf{R}$, 都有 $x(t, X_1) > 0$ 。

定理 2 假设 $a_1, a_2, c, e, 2a_1 - e > 0$, 式(2)所有的解都趋于平衡点, 因此式(2)没有闭轨。

证明 令 $X(t, X_1)$ 是式(2)的一个解, 由于 $\frac{d}{dt} V(X(t, X_1)) \leq 0$, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} V(X(t, X_1))$ 存在, 记为 $\Psi(X_1)$ 。此外可得下述不等式:

$$0 \leq V(X(t, X_1)) \leq V(X_1)$$

则在 $[0, +\infty)$ 内, $x(t, X_1), y(t, X_1), z(t, X_1), w(t, X_1)$ 是有界的, 因而 $\{X(t, X_1) | t > 0\}$ 是有界的。记 $X(t, X_1)$ 的 ω 极限集是 $\Omega(X_1)$, 且令 $X_2 \in \Omega(X_1)$, 则存在一个时间序列 $\{t_n | n \in \mathbf{N}^+\}$ 使得:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty, \lim_{t_n \rightarrow +\infty} X(t_n, X_1) = X_2$$

由于

$$X(t, X_2) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} X(t, X(t_n, X_1)) =$$

$$\lim_{t_n \rightarrow +\infty} X(t+t_n, X_1)$$

对任意 $t \in \mathbf{R}$, 可得:

$$V(X(t, X_2)) = \lim_{t_n \rightarrow +\infty} V(X(t+t_n, X_1)) = \Psi(X_1)$$

由定理 1 中 1) 可得 $X_2 \in \{E_1, E_+, E_-\}$ 。因此 $\Psi(X_1) \subseteq \{E_1, E_+, E_-\}$ 。由极限集 $\Omega(X_1)$ 的连通性可得 $\Omega(X_1) = \{E_1\}$ 或 $\Omega(X_1) = \{E_+\}$ 或 $\Omega(X_1) = \{E_-\}$ 。因此当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $X(t, X_1)$ 趋于式(2) 其中一个平衡点。

定理 3 假设 $a_1, a_2, c, e, 2a_1 - e > 0$, 那么有下述结论成立:

- 1) 式(2) 不存在同宿轨。
- 2) 式(2) 不存在异宿轨。

证明 1) 用反证法证明式(2) 没有同宿轨。假设 $X(t) = (x(t), y(t), z(t), w(t))$ 是式(2) 的同宿轨, 那么 $X(t)$ 是式(2) 的一个解, 并且满足:

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} X(t) = e_-, \lim_{t \rightarrow +\infty} X(t) = e_+$$

由 V 函数的偏导数可得:

$$V(e_-) \geq V(X(t)) \geq V(e_+)$$

则 $V(e_-) \equiv V(X(t)) \equiv V(e_+)$ 。由定理 1 中 1) 可得 $X(t)$ 是式(2) 的一个平衡点。

2) 证明式(2) 不存在异宿轨的方法与 1) 的方法相同, 证明过程此处省略。

5 超混沌吸引子的最终有界

本节对超混沌吸引子的最终有界集进行研究, 并用数值模拟验证超混沌吸引子的全局有界性的结论。

一个二次自治系统可表示为

$$\dot{X} = Ax + \sum_{i=1}^n x_i B_i X + C$$

其中 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n, A \in \mathbf{R}^{n \times n}, B_i = (b_{jk}^i)_{n \times n} \in \mathbf{R}^{n \times n}, C \in \mathbf{R}^{n \times 1}$, 并且所有的矩阵 B_1, \dots, B_n 满足 $b_{ij}^k = b_{ik}^j, i, j, k = 1, 2, \dots, n$ 。

假设存在一个正定的对称阵 P , 与 $u \in \mathbf{R}^{1 \times n}$, 使得下述矩阵为负定矩阵:

$$Q = A^T P + PA + (B_1^T u^T, B_2^T u^T, \dots, B_n^T u^T)^T$$

并且

$$\sum_{i=1}^n x_i X^T (B_i^T P + P B_i) X = 0$$

对任意的 $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbf{R}^n$, 存在下述的最终有界集:

$$\Omega = \{X \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq X^T P X + uX + \frac{1}{4} u P^{-1} u^T \leq R_{\max}\}$$

其中 R_{\max} 是一个实数, 其值由下述最优化问题确定:

$$\begin{aligned} \max V(X) &= X^T P X + uX + \frac{1}{4} u P^{-1} u^T \\ \text{s. t. } \dot{V}(X) &= X^T Q X + M X + uC = 0 \end{aligned}$$

其中 $M = 2C^T P + uA$ 。

定理 4 假设 $a_1, a_2, c, e, f, m, p_{11}, p_{22}, p_{44} > 0, p_{11} p_{44} - p_{14}^2 > 0$, 并且 $-2(a_1 p_{11} + f p_{14})(2ep_{22}(p_{22} + a_2 p_{14})^2 + 2cp_{22}(mp_{44})^2) + 4cep_{22}^2(a_1 p_{14} + f p_{44})^2 < 0$, 那么集合 Ω 是系统(2) 的最终有界集。 R_{\max} 由下述最优化问题确定:

$$\begin{aligned} \Omega &= \{X \in \mathbf{R}^4 \mid p_{11} \left(x_1 + \frac{p_{14}}{p_{11}} x_4\right)^2 + p_{22} \left(x_2 + \frac{mp_{14}}{p_{22}} x_4\right)^2 + \\ &\quad p_{22} \left(x_3 - \frac{bp_{22} + a_2 p_{11}}{p_{22}}\right)^2 \\ \max V(X) &= p_{11} \left(x_1 + \frac{p_{14}}{p_{11}} x_4\right)^2 + p_{22} \left(x_2 + \frac{mp_{14}}{p_{22}} x_4\right)^2 + \\ &\quad p_{22} \left(x_3 - \frac{bp_{22} + a_2 p_{11}}{p_{22}}\right)^2 + \frac{p_{44} p_{11} - p_{14}^2}{p_{11}} (x_4)^2 \\ \text{s. t. } \dot{V}(X) &= -2(a_1 p_{11} + f p_{14}) x_1^2 - 2cp_{22} x_2^2 - \\ &\quad 2ep_{22} x_3^2 - 2(a_1 p_{14} + f p_{44}) x_1 x_4 + 2(p_{22} + a_2 p_{14}) x_2 x_4 + \\ &\quad 2mp_{44} x_3 x_4 + 2mbp_{14} x_1 x_2 - 2mcp_{14} x_2 + 2(dp_{22} + bep_{22} + a_2 ep_{11}) \\ &\quad x_3 + 2mp_{14} x_4 - 2d(a_2 p_{11} + bp_{22}) = 0 \end{aligned}$$

证明 式(2) 可写成如下形式:

$$\dot{X} = Ax + \sum_{i=1}^4 x_i B_i X + C$$

其中:

$$A = \begin{pmatrix} -a_1 & a_2 & 0 & 0 \\ b & -c & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -e & 0 \\ -f & 0 & m & 0 \end{pmatrix} \quad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B_4 = O_{4 \times 4}, C = (0, 0, d, 0)^T$$

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_4)^T \in R^4$$

$$A \in R^{4 \times 4}, B_i = (b_{jk}^i)_{4 \times 4} \in R^{4 \times 4}$$

$C \in R^{4 \times 1}$, 并且所有的矩阵 B_1, \dots, B_4 满足 $b_{ij}^k =$

$b_{ik}^j, i, j, k = 1, 2, \dots, 4$ 。

假设 $P_{ij} = P_{ji}$, 令

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & 0 & P_{14} \\ 0 & P_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P_{22} & 0 \\ P_{14} & 0 & 0 & P_{44} \end{pmatrix}$$

$$M = 2C^T P + uA =$$

$$(-a_1 u_1 + bu_2 - fu_4, a_2 u_1 - cu_2, -2dp_{22} - eu_3 + mu_4, u_2)$$

那么可得:

$$Q = A^T P + PA + (B_1^T u^T, B_2^T u^T, \dots, B_4^T u^T)^T =$$

$$\begin{pmatrix} -2a_1 P_{11} - 2fp_{14} & 0 & 0 & -a_1 P_{14} - fp_{44} \\ 0 & -2cP_{22} & 0 & a_2 P_{14} + p_{22} \\ 0 & 0 & -2eP_{22} & mp_{44} \\ -a_1 P_{14} - fp_{44} & a_2 P_{14} + p_{22} & mp_{44} & 0 \end{pmatrix}$$

$$u = (0, 2mp_{14}, -2(a_2 p_{11} + bp_{22}), 0)$$

$$V(X) = p_{11} \left(x_1 + \frac{p_{14}}{p_{11}} x_4 \right)^2 + p_{22} \left(x_2 + \frac{mp_{14}}{p_{22}} x_4 \right)^2 + p_{22} \left(x_3 - \frac{bp_{22} + a_2 p_{11}}{p_{22}} \right)^2 + \frac{p_{44} p_{11} - p_{14}^2}{p_{11}} (x_4)^2$$

$$\dot{V}(X) = -2(a_1 p_{11} + fp_{14}) x_1^2 - 2cp_{22} x_2^2 - 2ep_{22} x_3^2 - 2(a_1 p_{14} + fp_{44}) x_1 x_4 + 2(p_{22} + a_2 p_{14}) x_2 x_4 + 2mp_{44} x_3 x_4 + 2mbp_{14} x_1 - 2mcp_{14} x_2 + 2(dp_{22} + bep_{22} + a_2 ep_{11}) x_3 + 2mp_{14} x_4 - 2d(a_2 p_{11} + bp_{22}) = 0$$

通过计算, 可得当 $a_1, a_2, c, e, f, m, p_{11}, p_{22} p_{44} > 0,$

$p_{11} p_{44} - p_{14}^2 > 0, -2(a_1 p_{11} + fp_{14})(2ep_{22}(p_{22} + a_2 p_{14})^2 + 2cp_{22}(mp_{44})^2 + 4cep_{22}^2(a_1 p_{14} + fp_{44})^2) < 0$ 时矩阵 P 正定, 矩阵 Q 负定, 由引理 1, 定理 4 得证。

由上面的分析, 式(2)是最终有界的, 并用数值模拟超混沌吸引子的最终有界集。当 $a_1 = 6, a_2 = 5, b = 23.6, c = 2.1, d = -23.5, e = 2.1, f = 8.5, m = 1.8,$ 式(2)是超混沌的。当 $p_{11} = 1.64, p_{22} = 1.3, p_{44} = 0.67, p_{14} = -1,$ 矩阵 P 正定, 矩阵 Q 负定, 由定理 4 可得 $R_{\max} = 3\ 124.8$ 。

$$\Omega = \{X \in R^4 \mid 1.64 \left(x_1 - \frac{1}{1.64} x_4 \right)^2 + 1.3 \left(x_2 - \frac{1.8}{1.3} x_4 \right)^2 +$$

$$1.3(x_3 - 22.9)^2 + \frac{0.0988}{1.64}(x_4)^2 \leq 3\ 124.8\}$$

超混沌的最终有界集如图 10 所示。

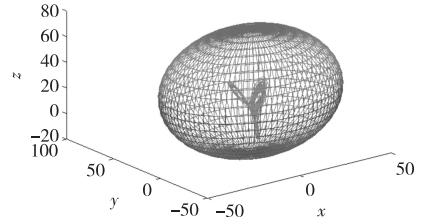


图 10 式(2)超混沌吸引子的最终有界: $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

Fig. 10 The ultimate boundedness of hyperchaotic attractor of system (2): $(a_1, a_2, b, c, d, e, f, m) = (6, 5, 23.6, 2.1, -23.5, 2.1, 8.5, 1.8)$

6 总 结

本文提出一个新的四维非 Shil'nikov 型超混沌系统, 严格证明了同宿轨与异宿轨的不存在性, 并通过构造 Lyapunov 函数得到超混沌吸引子的最终有界集。这对揭示混沌的形成机制及精确刻画吸引子的位置有着重要的意义。借助数值分析的方法验证超混沌吸引子的存在性, 展示超混沌系统的复杂动力学行为。这些研究不仅对超混沌系统的研究提供理论依据, 而且对深入刻画混沌和超混沌的结构及性质十分重要。

参考文献(References):

- [1] LORENZ E N. Deterministic Non-periodic Flow [J]. Journal of the Atmospheric Sciences, 1963 (20): 130—141
- [2] LIU C X, LIU L, LIU T, et al. A New Butterfly-shaped Attractor of Lorenz-like System [J]. Chaos Solit Fract, 2006, 28(5): 1196—12039
- [3] LI H W, WANG M. Hopf Bifurcation Analysis in a Lorenz-type System [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 71(1—2): 235—240
- [4] YANG Q G, CHEN Y M. Complex Dynamicals in the Unified Lorenz-type System [J]. Int J Bifurc Chaos, 2014, 24(4): 1450055
- [5] ROSSLER O E. An Equation for Hperchaos [J]. Phys Lett A, 1979(71): 155—157
- [6] KAPITANIAK T, CHUA L O, ZHONG G Q. Experimental

- Hyperchaos in Coupled Chua's Circuits [J]. IEEE Transactions on Circuits & Systems I-Fundamental Theory & Application, 1994, 41(7):499—503
- [7] STENFLO L. Generalized Lorenz Equations for Acoustic-gravity Waves in the Atmosphere [J]. Physica Scripta, 1996, 53(1):83—44
- [8] YANG Q G, LIU Y J. A Hyperchaotic System from a Chaotic System with One Saddle and Two Stable Node-foci [J]. J Math Anal Appl, 2009(360):293—306
- [9] LI Y X, LIU X Z, CHEN G R. A New Analysis, Hyperchaotic Lorenz-type System: Generation, and Implementation [J]. Int J Circuit Theory Appl, 2011, 39(8):865—879
- [10] CHEN Y M, YANG Q G. A New Lorenz-type Hyperchaotic System with a Curve of Equilibria [J]. Math Comput Simul, 2015, 112:40—55
- [11] CHEN Y M. The Existence of Homoclinic Orbits in a 4D Lorenz-type Hyperchaotic System [J]. Nonlinear Dyn, 2017, 87(3):1445—1452
- [12] SU Q, WANG C. A New Method for Generating Chaotic System with Arbitrary Shaped Distributed Attractors [J]. Chaos, 2018, 28:073106
- [13] LI Z, CHEN G. Homoclinic and Heteroclinic Orbits in a Modified Lorenz System [J]. Information Sciences, 2004, 165(3-4):235—245
- [14] SHILNIKOV L P. A Contribution to the Problem of the Structure of an Extended Neighborhood of a Rough Equilibrium State of Saddle-focus Type [J]. Math USSR-Sb, 1970, 10(1):91—102
- [15] WANG P. Explicit Ultimate Bound Sets of a New Hyperchaotic System and Its Application in Estimating the Hausdorff Dimension [J]. Nonlinear Dyn, 2013, 74(1-2):133—143

Ultimate Boundedness of a Non-Shil'nikov Type 4D Hyperchaotic System

NIU Ya-xing, YANG Qi-gui

(School of Mathematics, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: We report a novel four-dimensional (4D) hyperchaotic system with a unique equilibrium or two equilibria based on 3D Lorenz-type system, and can clearly observe hyperchaotic attractors at each type of equilibria. By utilizing proper Lyapunov function and analytical method, we rigorously prove the nonexistence of homoclinic orbit and heteroclinic orbit, further, the hyperchaos of system is no chaos in the sense of Shil'nikov. Further, the ultimate bound sets of system are constructed by Lyapunov function and appropriate optimization. Moreover, the results are verified by numerical simulation method. The complex dynamics are exhibited with the changing parameter by phase portrait, Lyapunov exponents spectrum, bifurcation diagram and Poincare mapping analysis system.

Key words: hyperchaos; chaos; homoclinic orbit; heteroclinic orbit; ultimate bound

责任编辑:李翠薇

引用本文/Cite this paper:

牛亚星,杨启贵. 一类非 Shil'nikov 型四维超混沌系统的最终有界[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020, 37(4): 20—27

NIU Y X, YANG Q G. Ultimate Boundedness of a Non-Shil'nikov Type 4D Hyperchaotic System [J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020, 37(4): 20—27