doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2020.0001.011

Heston 随机波动率模型的 Multilevel Monte Carlo 方法*

庭开娟, 罗贤兵**, 刘琳芳
(贵州大学 数学与统计学院,贵阳 550025)

摘 要:在市场并非完全有效的前提下,波动率为常数的 Black-Scholes 模型已不能准确刻画现实世界中的金融市场,提出了用波动率不为常数的 Heston 随机波动率模型来刻画资产收益的运动过程,进而研究一种路径依赖形衍生产品,亚氏期权和回望期权;在模型下,通过 Milstein 离散和 Multilevel Monte Carlo 法对奇异期权中这两种期权的期权价格进行模拟,最后与普通 Monte Carlo 法模拟的结果进行比较,数值实验从方差、期望、样本数及计算成本方面验证了 Multilevel Monte Carlo 方法的高效性。

关键词:Heston 随机波动率模型;Multilevel Monte Carlo 法;亚氏期权;回望期权
中图分类号:O242.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2020)01-0065-06

0 引 言

Fisher Black 和 Myron Scholes[1] 在有效市场[2]前提下,假设价格的波动服从布朗运动,建立了著名的期权定价模型:Black-Scholes 模型(BS 模型)。模型中假设波动率为常数,而现实生活中,这一假设无法解释市场上出现的波动率微笑和波动率曲面[3]的现象,因此 BS 模型中假设波动率为常数显然是不合理的。因此,运用随机波动率模型来描述股票价格的波动,更能刻画市场中资产收益的运动过程。Hull-White[4] 提出了 Hull-White 模型,首次给出了随机波动率模型下欧式期权定价问题的级数解形式,但它不是真正的闭合解,并且在这个模型中,假设两个布朗运动之间的相关系数,在这个条件下,所得到的模型不能准确刻画现实世界中的金融市场。

Heston[5] 利用 Cox,Ingersoll 和 Ross 提出的均衡定价理论(即 CIR 模型)构造了随机波动率模型:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = rS_t\mathrm{d}t + \sqrt{V_t}\,S_t\mathrm{d}W_1 \\ \mathrm{d}V_t = \lambda(\sigma^2 - V_t)\mathrm{d}t + \eta\sqrt{V_t}\,\mathrm{d}W_2 \\ \mathrm{d}W_1\mathrm{d}W_2 = \rho\mathrm{d}t \end{cases} \tag{1}$$

其中,S_t 表示股票价格,r 表示无风险利率,V_t 表示股票价格的方差,W_1 和 W_2 表示两个布朗运动,ρ 表示两个布朗运动之间的相关系数,λ 表示均值回归系数,σ^2 表示长期方差,η 表示波动率方差。当标的资产比较复杂、维数较高时,Heston 随机波动率模型不能得到精确的解析解,只能研究其数值近似。

对这种模型的数值求解,通常情况下考虑的是数值模拟法。而在求解这类随机微分方程,所采用的数值法是 Monte Carlo 法(MC),这个算法的优点是容易实现和改进,并且算法灵活度高,但是,其缺点也是显而易见的,其计算量大,所需样本数多,计算速度缓慢,消耗内存大,得不到所需的误差,并且在与方差缩减技术结合也不能达到理想的效果。为了提高计算效率,Kebaier[6] 在控制变量法的基础

收稿日期:2019-07-12;修回日期:2019-09-17.
* 基金项目:国家自然科学基金(11961008);国家自然科学基金项目资助(11461013).
作者简介:庭开娟(1994—),女,贵州贵定人,硕士研究生,从事微分方程数值解研究.
** 通讯作者:罗贤兵(1978—),男,贵州铜仁人,博士,教授,博士生导师,从事微分方程数值解最优空控制问题的数值分析不确定量化研究,Email:Luoxb121@163.com.

上,提出了两层的蒙特卡洛法,收敛效果较之前得到改进,2008 年 Giles 在两层 MC 法的基础上进行推广,提出了 Multilevel Monte Carlo(MLMC)法,在对期权定价的数值实验中,将 MLMC 法与普通的 MC 进行比较,方差、计算速度和成本的复杂度等方面得到了改善,大大地节省了计算成本。

利用式(1)结合 Milstein 离散,用 MLMC 法来对亚式期权和回望期权进行定价,给出了期权定价的算法思路。在求解过程中,首先通过 Milstein 方法对方程进行数值离散,然后通过 Multilevel Monte Carlo 法[5]对亚式期权和回望期权进行定价,最后与普通的 MC 法进行比较,数值实验从方差、均值、样本数及计算成本方面验证了 MLMC 法的高效性。

1 数值方法

对模型式(1)的求解,先采用 Milstein 方法进行离散,在模型下,采用 MLMC 方法对亚式期权和回望期权进行模拟,在此基础上产生的均方误差(f_{MSE})应为

$$f_{\mathrm{MSE}}=c_1h^2+c_2N^{-1}$$

其中,c_1h^2 为 Milstein 方法产生的误差,c_2N^{-1} 为 MLMC 模拟产生的误差,c_1 和 c_2 为正常数。

1.1 Milstein 离散法

对随机微分方程的数值解法通常有 Euler-Maruyama 方法和 Milstein 方法,这两种方法是在随机 Taylor 展开的不同地方进行截断得到,Euler-Maruyama 方法的收敛阶是 1/2 阶,而 Milstein 方法的收敛阶是 1 阶。相比较而言,Milstein 方法的收敛效果更好,因此对模型式(1)采用 Milstein 法离散,其形式如下:

$$X_j=X_{j-1}+\Delta tf(X_{j-1})+g(X_{j-1})(\Delta W_j)+\frac{1}{2}g(X_{j-1})g'(X_{j-1})((\Delta W_j)^2-\Delta t)$$

则随机微分方程式(1)中的 S,W 和 V 进行数值离散格式为

$$\begin{cases}\hat{S}_{n+1}=\hat{S}_n+r\,\hat{S}_nh+\sqrt{V_n^+}\hat{S}_n\Delta W_{1,n}+\frac{1}{2}V_n(\Delta W_{1,n}^2-h)+\frac{1}{4}\eta(\Delta W_{1,n}\Delta W_{2,n}-\rho h)\\ \hat{V}_{n+1}=\hat{V}_n+\lambda(\sigma^2-\hat{V}_n)+\eta\sqrt{V_n^+}\Delta W_{2,n}+\frac{1}{4}\eta^2(\Delta W_{2,n}^2-h)\end{cases}$$

在进行数值实验时,为了提高精度和减小方差,引入一个新的变量:$e^{\lambda t}(V-\sigma^2)$,则

$$\begin{cases}\hat{S}_{n+1}=\hat{S}_n+r\,\hat{S}_nh+\sqrt{V_n^+}\hat{S}_n\Delta W_{1,n}+\frac{1}{2}V_n(\Delta W_{1,n}^2-h)+\frac{1}{4}\eta(\Delta W_{1,n}\Delta W_{2,n}-\rho h)\\ \hat{V}_{n+1}=\sigma^2+e^{-\lambda h}((\hat{V}_n-\sigma^2))+\eta\sqrt{V_n^+}\Delta W_{2,n}+\frac{1}{4}\eta^2(\Delta W_{2,n}^2-h)\end{cases}\tag{2}$$

注意到,对于模型式(1)中的$\sqrt{V}$在数值实验中取的是$\sqrt{V^+}=\sqrt{\max(V,0)}$。由于波动率不满足全局 Lipschitz 条件,所以没有理论去验证收敛阶,但是可以从接下来对亚式期权和回望期权的数值实验中看到,方差的收敛阶逐渐地降低得比一阶慢。

1.2 Multilevel Monte Carlo 法

普通 MC 法采用的是直接抽样,要达到某个精度,所需样本量非常大。为了改进方法,Kebaier 于 2005 年提出了两水平方法,Giles 在该方法的基础上,根据控制变量法[7]和多层网格法[8]的思想,将两水平的方法推广到多层上:MLMC 方法。与普通 MC 法不同的是,MLMC 法选取不同的时间步长 $h_l=M^{-l}T$(M 表示细化时间步长因子)进行抽样。在(MLMC)方法中,如果想要去估计 $E[Q_L]$,需要选取一列递增的离散点 $Q_0,Q_1,\cdots,Q_{L-1}$ 去逼近 Q_L(其中下标表示离散层数),那么有如下等式成立:

$$E[Q_L]=E[Q_0]+\sum_{l=1}^{L}(E[Q_l]-E[Q_{l-1}])\tag{3}$$

相应地,$E[Q_L]$有如下无偏估计:

$$E[Q_L]=\frac{1}{N_0}\sum_{i=1}^{N_0}Q_0(\omega_i,0)+\sum_{l=1}^{L}\left[\frac{1}{N_l}\sum_{i=1}^{N_l}(Q_l(\omega_i,l)-Q_{l-1}(\omega_i,l-1))\right]\tag{4}$$

注意到,在每一层上,不同的下标 i 表示独立的样本,但在计算 Q_L 和 Q_{L-1} 时,使用的是相同的抽样 $\omega(i,l)$,并且在不同的水平上使用独立的抽样。在式(3)中,令 $Y_0=Q_0$,$Y_l=Q_l-Q_{l-1}$,有

$$E[Q_L]=\sum_{l=0}^{L}E[Y_l]$$

根据式(4),对 $E[Y_l]$的无偏估计 Y_l,就有

$$\hat{Y}_0=\frac{1}{N_0}\sum_{i=0}^{N_0}Q_0(\omega_i,0)$$

$$\hat{Y}_l = \frac{1}{N_l}\sum_{i=1}^{N_l}[Q_l(\omega_i, l) - Q_{l-1}(\omega_i, l-1)]$$

那么，MLMC 的估计为：$\hat{Q}_L^{ML} = \sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l$。

通过以上可知，若要估计 $E[Q_L]$，需要使用到不同的水平 l，并且每一水平上的离散误差都不相同，给定的精度决定了最优的水平数，从而决定了最优样本数。在给定的精度 ε 下，如果要使计算成本达到最小，首先分析 MLMC 均方误差

$$e(\hat{Q}_L^{ML})^2 = E[(\hat{Q}_L^{ML} - E(Q))^2] =$$
$$E[(\hat{Q}_L^{ML} - E[\hat{Q}_L^{ML}] + E[\hat{Q}_L^{ML}] - E(Q))^2] =$$
$$E[(\sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l - E[\sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l] + E[\hat{Q}_L^{ML}] - E(Q))^2] =$$
$$\sum_{l=0}^{L}\frac{1}{N_l}V[\hat{Y}_l] + (E[\hat{Q}_L^{ML} - Q])^2 \tag{5}$$

式(5)中，右边的第一项是 Y 的方差

$$Var[Y] = \sum_{l=0}^{L}\frac{1}{N_l}V_l$$

右边的第二项是偏差的平方。

通过文献[3]分析有 $V_l = O(h_l)$，故可令

$$N_l = O(\varepsilon^{-2}Lh_l)$$

所以 $Var[Y] = f_{\text{MSE}} = O(\varepsilon^2)$，而总体的计算成本近似为 $\sum_{l=0}^{L}N_l h_l^{-1}$，为了计算总体计算成本，通常选取 $L = O(\log\varepsilon^{-1})$，则求得 MLMC 的总体计算成本为

$$\sum_{l=0}^{L}N_l h_l^{-1} = O(\varepsilon^{-2}L^2) = O(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2) \tag{6}$$

而已知的普通 MC 法的计算成本为 $O(\varepsilon^{-3})$，当 $\varepsilon\to 0$ 时，显然 $\varepsilon^{-1} \gg (\log\varepsilon)^2$，相比之下，MLMC 的计算成本较普通的 MC 计算成本得到改进。

1.3　Multilevel Monte Carlo 定理

定理[10]　在给定的一个布朗运动 $W(t)$ 中，设 Q 表示随机微分方程解的一个泛函，$\hat{Q}_l$ 表示使用时间步长为 $h_l = M^{-1}T$ 的数值离散后的一个近似。若在 N_l 次蒙特卡洛抽样中，存在独立的估计 $\hat{Y}$，及存在正常数 $\alpha \geqslant \frac{1}{2}$，$\beta$，$c_1$，$c_2$，$c_3$，使得

（1）$E[\hat{Q}_l - Q] \leqslant c_1 h_l^{\alpha}$

（2）$E[\hat{Y}_l] = \begin{cases} E[Q_0], l=0 \\ E[\hat{Q}_l - \hat{Q}_{l-1}], l>0 \end{cases}$

（3）$V[\hat{Y}_l] \leqslant c_2 N_l^{-1} h_l^{\beta}$

（4）$\hat{Y}_l$ 的计算成本 C_l 是有界的，即

$$C_l \leqslant c_3 N_l h_l^{-1}$$

则对任意的 $\varepsilon < e^{-1}$，存在一个正常数 c_4，对于值为 L，N_l 的多层估计

$$\hat{Y} = \sum_{l=0}^{L}\hat{Y}_l$$

它的均方根误差 MSE 及计算成本都是有界的，分别为

$$f_{\text{MSE}} = E[(\hat{Y} - E[Q])^2] < \varepsilon^2$$

$$C \leqslant \begin{cases} c_4\varepsilon^{-2}, \beta > \gamma \\ c_4\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2, \beta = \gamma \\ c_4\varepsilon^{-2-(\gamma-\beta)/\alpha}, 0 < \beta < \gamma \end{cases}$$

详细证明见文献[5]。

1.3　MLMC 定价期权的算法思路

（1）首先给出在第 0，1，2 层的初始样本数，并从 $L=2$ 开始计算；

（2）在每一层需计算 $Y_l = Q_l - Q_{l-1}$ 及方差 $V[Y_l] = Var[Q_l - Q_{l-1}]$；

（3）定义最优样本数

$$N_l = 2\varepsilon^{-2}\sqrt{V_l/h_l}\left(\sum_{l=0}^{L}\sqrt{V_l h_l}\right);$$

（4）在每一层上用步骤 3 中定义的样本数计算所需的每一层的最优样本数；

（5）若判断出

$$E[Q_L - Q] = \frac{|E[Q_L - Q_{L-1}]|}{2^{\alpha-1}} \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

则继续循环，否则令 $L = L+1$，并初始化 N_l，跳到步骤(2)；

（6）满足步骤(5)的条件，最后得到的期权的价格为 $Y = \sum_{l=0}^{L}Y_l$。

2　数值实验

在模型式(1)中，考虑 $S(0)=1$，$V(0)=0.04$，$T=1$，$r=0.05$，$\sigma=0.2$，$k=5$，$\eta=0.25$，$\rho=-0.5$ 的复杂期权。由于亚氏期权和回望期权[10]的收益依赖于路径，是一种路径依赖性衍生产品，当不存在解析解时，可以通过数值模拟：MLMC 法对依赖路径衍生产品进行定价。

采用 Matlab 进行数值实验，在数值实验中，给定了 5 个不同的精度 ε，并选取初始样本数 $N=$

100 000进行数值模拟。

2.1 亚氏期权

亚氏期权的收益函数与标的资产在有效期内价格的算术平均有关,因此它的收益函数可表示为

$$Q=\exp(-r)\max(0,S_{ave}-S(0))$$

其中 $S_{ave}=\int_0^1 S(t)\,\mathrm{d}t$. 通过以下数值格式逼近

$$S_{ave,l}=\sum_{n=1}^{N_l}\frac{1}{2}(\hat{S}_n+\hat{S}_{n-1})h_l\text{。}$$

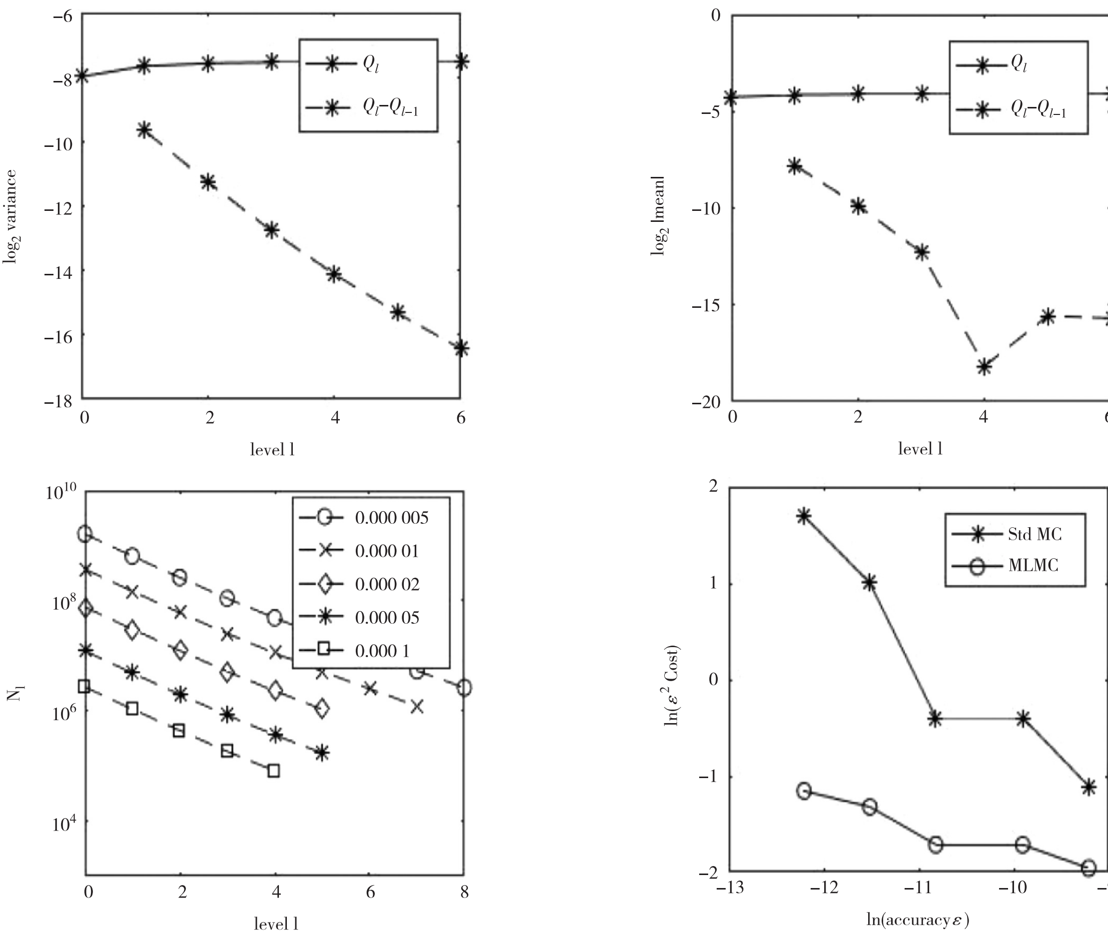

图 1 亚式期权数值模拟结果

Fig. 1 Numerical simulation results of Asian options

由图 1 可以看出:左上角绘制的是 Q_l, Q_l-Q_{l-1} 的方差 V 随着水平数 l 的对数变化图,Q_l-Q_{l-1} 的斜率几乎接近−1,这表明 $V_l=O(h_l)$,并且随着层数 l 的增加,Q_l-Q_{l-1} 的方差 $V[Q_l-Q_{l-1}]$ 在逐渐减少,在相同的样本数及时间步长的情况下,当 $l=6$ 时,MLMC 的方差 $V[Q_l-Q_{l-1}]$ 比普通的蒙特卡洛法的 $V[Q_l]$ 小,说明 MLMC 较 MC 更优;图中右上角绘制的是均值与层数的对数变化图,可以看出,$E[Q_1-Q_{l-1}]=O(h_l)$,当 $l=6$ 时,MLMC 的均值 $E[Q_l-Q_{l-1}]=O(h_l)$ 明显比普通的 MC 法的 $E[Q_l]$ 低;左下角可以看出在给定不同的精度 ε 下,随着水平数 l 的增加,样本数在慢慢减少,最终得到一个最优的样本数,较大地提高了计算效率,降低了计算成本;图中右下角可看出普通的 MC 和 MLMC 的成本都在降低,但是 MLMC 的成本明显的比普通的 MC 的成本更节省,由文献[5]中 MLMC 定理可知,当 $V_l=O(h_l)$时,计算成本的 RMS 达到 $O(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2)$,从理论上分析,在所给定的精度下,对于标准的 MC 法,需要花费 $10^{3.16}$ 的工作量,而对于 MLMC 法只需花费 $10^{2.00}$ 的工作量,比率约为 0.069。

2.2 回望期权

回望期权的收益与在期权有效期内标的资产价格所达到的最大值和最小值有关。因此,它的收益函数为

$$Q=\exp(-rT)(S(1)-\min_{0<t<1}S(t))$$

对 $S(t)$ 的最小值是通过以下数值格式逼近

$$\hat{S}_{\min,l}=(\min_{t}(\hat{S}_n))(1-\xi\sigma\sqrt{h_l})$$

其中，$\xi=0.582\,6$。

图 2 绘制的关系与图 1 一样，方差 $V[Q_l-Q_{l-1}]$ 达到 $O(h_l)$，根据文献[5]中 MLMC 定理可分析出，MLMC 的计算成本的 RMS 达到 $O(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2)$。不管是在方差、期望、最优样本数及计算成本方面，从图中都可看出，MLMC 法比普通 MC 法的数值模拟结果好，从而验证了 MLMC 法的高效性。从理论上分析，在所给定的精度下，标准的 MC 法需花费 $10^{2.60}$ 工作量，而 MLMC 法需花费 $10^{2.16}$ 的工作量。

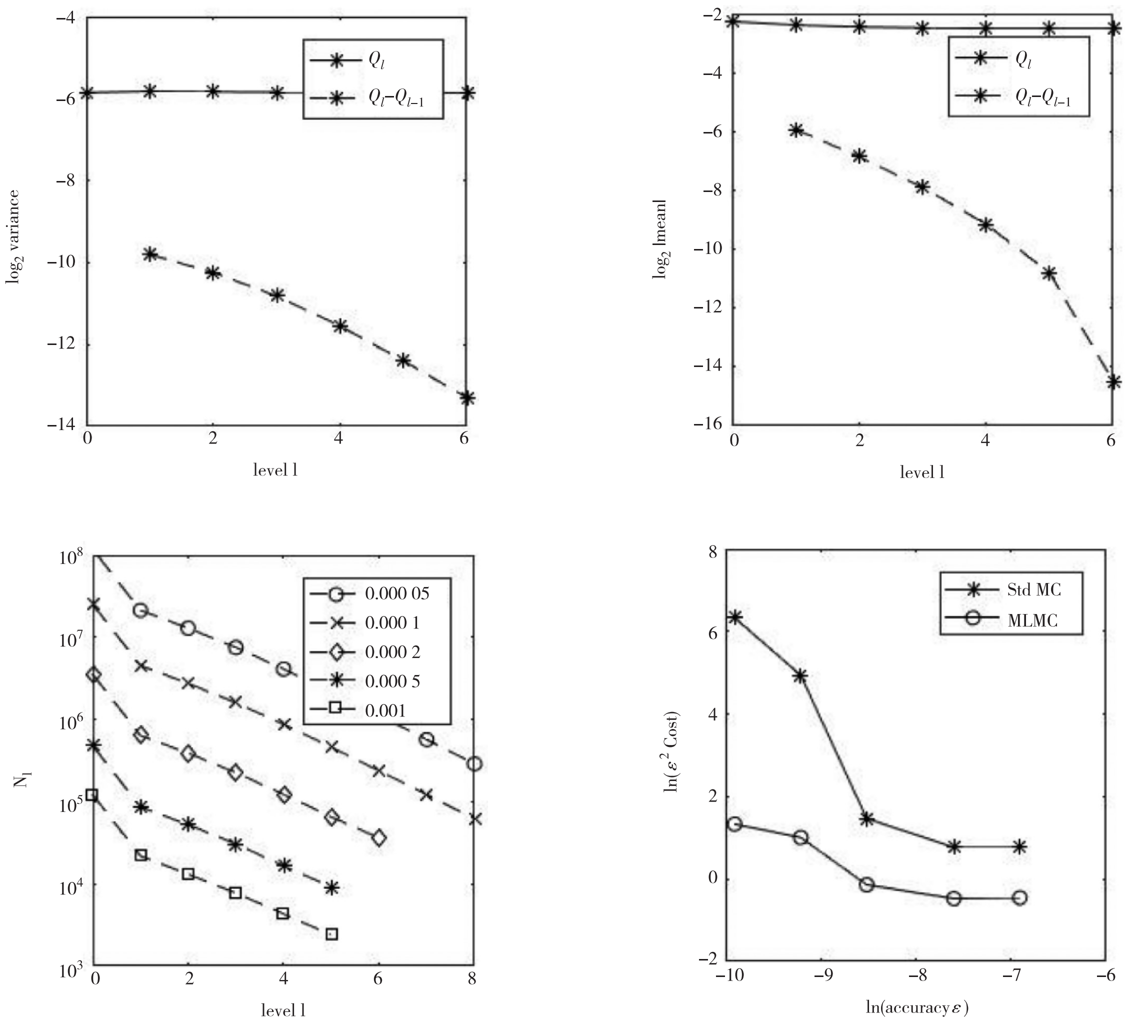

图 2　回望期权数值模拟结果

Fig. 2　Numerical simulation results of look back option

3　结　论

Heston 随机波动率模型比 Black-Scholes 模型更能准确地描述市场上股票的波动。因此，基于 Heston 随机波动率模型，运用 MLMC 数值模拟法研究了一种路径依赖性衍生产品，即亚氏期权、回望期权。普通的 MC 法的收敛率为 $1/\sqrt{N}$（N 为样本数），当 N 越大时，收敛速度逐渐变慢，则计算成本也会相应地增加，而普通的 MC 法的计算成本为 $O(\varepsilon^{-3})$，MLMC 的计算成本为 $O(\varepsilon^{-2}(\log\varepsilon)^2)$，相比普通的 MC 法计算成本得到改善，并且在给定不同的精度下，采用 MLMC 法每次的样本数都能得到更新，直至找到最优的样本数，这改善了数值实验中的计算效率、计算成本，并且在模型下亚氏、回望期权的数值模拟结果均验证了 MLMC 的高效性。

参考文献(References):

[1] BLACK F, SCHOLES M S. The Pricing of Options and Corporate Liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3):637—654

[2] FAMA E F. Topics in Cost Accounting and Decision [J]. Accounting Review, 1964, 39(2):521—522

[3] DAGLISH T, HULL J, SUO W. Volatility Surfaces: Theory Rules of Thumb and Empirical Evidence [J]. Quantitative Finance, 2007, 7(5):507—524

[4] HULL J. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities [J]. Journal of Finance, 1987, 42(2): 281—300

[5] HESTON S L. A Closed-form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options [J]. Review of Financial Studies, 1993, 6(2):327—343

[6] KEBAIER A. Statistical Romberg Extrapolation: A New Variance Reduction Method and Applications to Option Pricing [J]. The Annals of Applied Probability, 2005, 15(4):2681—2705

[7] GLASSERMAN P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering [J]. Stochastic Modelling & Applied Probability, 2003, 37(8):103—168

[8] GILES M B. Multilevel Monte Carlo Methods [J]. Acta Numerica, 2015, 24: 259—328

[9] 约翰·赫尔. 期权、期货及其他衍生产品[M]. 北京: 机械工业出版社, 2009

HULL J C. Options Futures and Other Derivatives[M]. Beijing: Machinery Industry Press, 2009(in Chinese)

[10] GILES M B, WATERHOUSE B J. Multilevel Quasi-Monte Carlo Path Simulation [J]. Radon, 2009(10): 165—181

[11] GILES M, DEBRABANT K, RößLER, et al. Numerical Analysis of Multilevel Monte Carlo Path Simulation Using the Milstein Discretization [J]. Quantitative Finance, 2013, 56(3): 607—617

Multilevel Monte Carlo Method for Heston Stochastic Volatility Model

TING Kai-juan, LUO Xian-bing, LIU Lin-fang

(School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: Under the premise that the market is not completely efficient, the Black-Scholes model with constant volatility can no longer accurately describe the financial market in the real world. In view of this situation, this paper proposes a Heston stochastic volatility model with non-constant volatility to describe the motion process of asset returns, and then studies a kind of path-dependent derivatives, Asian options and look-back options. Under this model, the option prices of these two kinds of options in exotic options are simulated by Milstein discrete method and Multilevel Monte Carlo method. Finally, the results of numerical experiments are compared with those of ordinary Monte Carlo method. Numerical experiments verify the efficiency of Multilevel Monte Carlo method from the aspects of variance, expectation, sample number and calculation cost.

Key words: Heston Stochastic Volatility Model; Multilevel Monte Carlo method; Asian option; lookback option

责任编辑:田 静

引用本文/Cite this paper:

庭开娟,罗贤兵,刘琳芳. Heston 随机波动率模型的 Multilevel Monte Carlo 方法[J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2020,37(1):65—70

TING K J, LUO X B, LIU L F. Multilevel Monte Carlo Method for Heston Stochastic Volatility Model[J]. Journal of Chongqing Technology and Business University (Natural Science Edition), 2020,37(1):65—70