doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.022

关于$\frac{0}{0}$型极限求解方法的讨论*

赵　晔
(西安工业大学 理学院,西安 710032)

摘　要:$\frac{0}{0}$型求极限的问题是极限问题中非常重要的问题,关于这类问题的讨论牵扯到很多相关的数学知识点,将这些相关的方法进行归纳,使得这种求极限的问题能更好地为学生了解.

关键词:极限;洛比达法则;等价无穷小的代换;导数
中图分类号:TP277　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2015)11-0093-03

在数学中,关于$\frac{0}{0}$型求极限的问题是学生学习的重点,也是难点.随着学习内容知识点的增加,求极限的问题也能利用很多不同的方法.此处在此专门探讨了求解这种$\frac{0}{0}$型极限问题的多种方法,比如:对求极限函数的化简变形、导数的定义、等价无穷小的代换、两个重要极限、洛比达法则、变上限积分函数的求导、泰勒公式等等.这些方法在题目中有的需要综合使用.

方法1　利用对求极限的函数的化简变形求解.这种方法注意是利用变形约去分子、分母中极限为零或者∞的因子,然后利用极限的四则运算法则计算.

例1　求$\lim\limits_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$.

分析　把x代入求极限函数,发现是一个$\frac{0}{0}$型,所以首先需要化简变形,也就是分子有理化,则有

$$\lim_{x\to-0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to0}\frac{2x}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}=0$$

方法2　利用导数的定义求$\frac{0}{0}$型极限.

例2　设$f(x)$在$x=0$处可导,且$f(0)=0$,求极限$\lim\limits_{x\to0}\frac{f(tx)-f(x)}{x}$.

分析　题目已知的条件是在这一点可导,求的是一个极限,自然而然就能想到这里考察的是导数与极限之间的关系,即导数的定义,同时注意在导数的定义中分母必须是对应的自变量的改变量.所以有

$$\lim_{x\to0}\frac{f(tx)-f(x)}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(tx)-f(0)-|f(x)-f(0)|}{x}=\lim_{x\to0}\frac{f(tx)-f(0)}{tx}\cdot t-\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=$$
$$tf'(0)-f'(0)=(t-1)f'(0)$$

方法3　利用等价无穷小的代换求$\frac{0}{0}$型极限.

收稿日期:2015-06-20;**修回日期:**2015-07-20.
* **基金项目:**陕西省教育厅专项科研计划项目(2013JK0590).
作者简介:赵晔(1977-),女,山东潍坊人,讲师,博士,从事模糊数学研究.

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}$.

分析 这是一类$\dfrac{0}{0}$型求极限的问题.从其特点看,不要立即用洛比达法则,因为分子分母的导数求起来比较麻烦.在此,先利用等价无穷小的代换.常用的等价无穷小代换中,与此题有关的是 $x\sim\sin x\sim e^{x}-1$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(1-e^{\sin x-x})}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(x-\sin x)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}e^{x}=1.$

方法 4 利用重要极限求解$\dfrac{0}{0}$型极限

例 4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}\sin\dfrac{x}{2^{n}}$.

分析 这是一个$\infty\cdot 0$型求极限问题.此题属于未定型求极限的问题,可以用洛比达法则求解,也可以用第一个重要极限求解.在此需要注意分子和分母的格式要对应相同.

解 $\lim\limits_{n\to\infty}2^{n}\sin\dfrac{x}{2^{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{x}{2^{n}}}{\dfrac{x}{2^{n}}}\cdot x=x$

方法 5 利用洛比达法则求解$\dfrac{0}{0}$型极限.

例 5 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}-2}{x^{2}}$.

分析 此题为$\dfrac{0}{0}$型极限.可以直接利用洛比达法则求解.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}+\sqrt{1-2x}-2}{x^{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+2x}}+\dfrac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}{2x\cdot\sqrt{1-2x}\cdot\sqrt{1+2x}}=$$

$$\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x}}{x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{(1-2x)-(1+2x)}{x(\sqrt{1-2x}-\sqrt{1+2x})}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-2x}+\sqrt{1+2x}}=-1$$

方法 6 利用变上限积分函数的求导求解$\dfrac{0}{0}$型极限.

例 6 设$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续,$f(0)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt}{x\int_{0}^{x}f(x-t)\,dt}=$ ________ .

分析 此题为$\dfrac{0}{0}$型极限,属于变上限积分函数求极限,而在变上限积分函数的问题中,往往考察的是其求导问题,因此采用洛比达法则最合适.此题的特别之处在于分子中的两个 x 不同,需要先化简变形.

解

$$\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt=x\int_{0}^{x}f(t)\,dt-\int_{0}^{x}tf(t)\,dt$$

$$\int_{0}^{x}f(x-t)\,dt=\int_{x}^{0}f(u)(-du)=\int_{0}^{x}f(u)\,du=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{0}^{x}(x-t)f(t)\,dt}{x\int_{0}^{x}f(x-t)\,dt}=\lim_{x\to 0}\frac{x\int_{0}^{x}f(t)\,dt-\int_{0}^{x}tf(t)\,dt}{x\int_{0}^{x}f(t)\,dt}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x) - xf(x)}{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + xf(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\int_0^x f(t)\,dt + xf(x)}$$

需要注意的是,此时极限类型仍为$\frac{0}{0}$型极限,但是此时却不能使用洛比达法则了,因为题目条件只说$f(x)$在$x=0$的某邻域内连续,但是未必可导,因此不满足洛比达法则的条件.此时只能对求极限的式子化简变形.分子分母同除以x,

$$原式 = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t + f(x)}$$

又因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1} = f(0)$$

从而,

$$原式 = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x} + \lim\limits_{x\to 0}f(x)} = \frac{f(0)}{f(0)+f(0)} = \frac{1}{2}$$

方法 7　利用泰勒公式求$\frac{0}{0}$型极限.

例 7　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$.

分析　泰勒公式虽然在高等数学中占得比重不是很大,但是合理应用起来,有时能大大简化运算.

解　考虑到极限式的分母为x^4,用麦克劳林公式表示出极限的分子,并取$n=4$,因为当$x\to 0$时,$\cos x = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)$,$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^5)$,$\cos x-\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -\frac{x^4}{12}+o(x^5)$,因而可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^4}{12}+o(x^5)}{x^4} = -\frac{1}{12}$$

以上讨论的几种方法都是经常接触的,除此之外,还可以灵活运用高等数学中的其他概念和知识点,来解决此类极限的求解问题.在学习的过程中,只有不断总结,不断完善所学的理论知识及结构,才能在解题中有新发现,有新创新.关于此类求极限问题,也还有更多更好的方法和思路需要进一步总结.

参考文献:

[1] 同济大学数学系.高等数学(6 版).北京:高等教育出版社,2001

[2] 甘泉.高等数学解题精髓[M].西安:陕西旅游出版社,2006

[3] 林伯渠,李正元.高等数学复习指导与典型例题分析[M].北京:机械工业出版社,2002

[4] 菲赫金哥尔茨.微积分学教程[M].北京:高等教育出版社,1970

[5] 单墫.数学竞赛研究教程[M].3 版.南京:江苏教育出版社,2009

(下转第 100 页)