doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.016

附有免赔额特约条款的汽车车身险鞅方法定价*

朱　丹

(湖南财政经济学院 基础课部,长沙 410205)

摘　要:在假定汽车车身事故损失服从正态分布模型下,利用 Martingale Pricing 方法推导出附有免赔额特约条款的汽车车身险的定价公式.

关键词:免赔额特约条款;障碍期权;鞅测度;风险中性定价;Girsanov 定理

中图分类号:F830.9;O211.63　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0067-04

免赔额是指在保险合同中规定的损失在一定限度内保险人不负赔偿责任的额度,国内多数财产险公司的车损险条款中均有关于免赔额的具体规定.一般而言,投保人可根据自己的驾驶技能、经济实力、汽车状况,自由选择免赔额,高免赔额低缴保费,低免赔额高缴保费,从而实现权利和义务的对等.对保险公司而言,免赔额条款的设定显然可以减少小额索赔的费用支出.因此,车损险实行免赔额条款实现了客户与保险公司的双赢,已逐渐为市场和客户接受.对免赔额汽车车身险保费定价的研究,国内多采用保险精算定价方法[1,2].事实上,保险与期权有着相似性,二者都是回避风险的金融工具.投保人购买保险相当于购买了一个以保险标的为基础风险资产的卖权,执行价格为约定赔偿金额,保险费就是该卖权的价格.在保险有效期内,若保险事故发生并造成标的损失,被保险人就能执行卖权,减少损失额.此处应用期权理论,采用鞅方法定价(即风险中性定价),给出了附有免赔额特约条款的的汽车车身险的保险费价格公式.

1　模型的基本假设及预备知识

1.1　基本假设

在不完全市场中,未定权益的定价取决于等价鞅测度的选取.关于如何选取一个恰当的鞅测度,可以参见文献[3].以下假定在给定的市场及其带流概率空间(Ω,F,P,F_P),P 本身即为一个风险中性鞅测度,即对市场中任意资产的价格过程 $\theta(t)$,其对于无风险资产的贴现过程 $e^{-rt}\theta(t)$ 为鞅[4].假设市场为有效的无摩擦市场,有两种资产:一种无风险资产,称为债券或银行存款,利率为 r(一个固定的常数,且借入与贷出的利率相等);一种风险资产(即汽车车身事故损失价值),其强度服从 Itô过程[5],满足

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t^P, 0 \leqslant t \leqslant T \tag{1}$$

其中,S_t 表示汽车车身在 t 时刻的事故损失价值;μ 表示车身价值的期望瞬间损失率;σ 表示车身价值损失率的瞬间标准差;μ,σ 均为常数;dW_t^P 表示在概率测度 P 下,布朗运动在 t 时刻的瞬间增量;T 表示汽车身险到期时刻.

收稿日期:2015-05-06;**修回日期**:2015-06-20.

* **基金项目**:湖南省科技厅软科学基金(2011ZK3101);湖南财政经济学院院级课题(K201101).

作者简介:朱丹(1973-),女,湖南衡阳人,副教授,硕士,从事数理金融研究.

1.2 预备知识

为了得到附有免赔率特约条款的汽车车身险在 0 时刻的价值表达式,先引入两个引理,其证明参见参考文献[6].

引理 1 设 $Y_T=\ln\frac{\bar{S}}{s_0}$,$\mu=r+\frac{\sigma^2}{2}$,则 Y_T 的分布函数为

$$P^R(Y_T<y)=N\left(\frac{y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\mathrm{e}^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}N\left(\frac{-y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

引理 2 设 $X_T=\ln\frac{S_T}{S_0}$,$Y_T=\ln\frac{\bar{S}}{S_0}$,$\mu=r+\frac{\sigma^2}{2}$,则 X_T,Y_T 的联合分布函数为

$$P^R(X_T<x,Y_T<y)=N\left(\frac{x-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-\mathrm{e}^{\frac{2\mu y}{\sigma^2}}N\left(\frac{x-2y-\mu T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

由式(1),结合 Itô定理[7],有

$$\mathrm{d}\ln S_t=\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}W_t^P$$

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\Delta W_T^P\right\} \tag{2}$$

其中,$\Delta W_T^P=W_T^P-W_0^P$ 服从正态分布 $N(0,T)$,W_T^P 表示在 T 时刻,P 测度下布朗运动的取值,W_0^P 为初始值.

利用 Girsanov 定理[8],定义测度 Q,$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\exp\left(-\int_0^T\frac{\mu-r}{\sigma}\mathrm{d}W_s^P-\frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2\mathrm{d}u\right)$,由 Itô定理,易得

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\Delta W_T^Q\right\} \tag{3}$$

其中,$\Delta W_T^Q=W_T^Q-W_0^Q$,服从正态分布 $N(0,T)$.

同样,还可利用 Girsanov 定理将 Q 测度转换成另一种测度 R. 定义测度 R,满足 $\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}=\exp\left(\int_0^T\sigma\mathrm{d}W_s^Q-\frac{1}{2}\int_0^T\sigma^2\mathrm{d}u\right)=\exp\left(\sigma\Delta W_T^Q-\frac{1}{2}\sigma^2T\right)$,由 Itô定理,得

$$S_T=S_0\exp\left\{\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\Delta W_T^R\right\} \tag{4}$$

其中,$\Delta W_T^R=W_T^R-W_0^R$,服从正态分布 $N(0,T)$.

2 附有免赔额特约条款的汽车车身险到期时刻(T)的价值特征

附有免赔额特约条款的汽车车身险在设置了执行价格 K(履赔起付价格)的同时,另外又设置了障碍价格 B(常数),如在保险合约有效期内,车身事故损失未曾突破 B,则保险合约到期失效;如果突破了 B,则附有免赔额特约条款的汽车车身险到期收益与一般保险合约到期收益相同.因此,附有免赔额特约条款的汽车车身险到期时刻 T 的现金流量为

$$C_T=\begin{cases}S_T-K,S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B\\0,S_T<K,\bar{S}\geqslant B\\0,\bar{S}<B\end{cases} \tag{5}$$

其中,C_T 代表附有免赔额特约条款的汽车车身险到期时刻(T)的价值,$\bar{S}=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}S_t$,$K$ 代表保单中约定的履赔起付价格,B 代表保单中约定的免赔额(即障碍价格).

一旦附有免赔额特约条款的汽车车身险到期现金流量确定后,其评价模型可根据 Martingale Pricing 的

方法求解,在风险中立下,其价值是到期现金流量期望值的现值,并以无风险利率折现.

3　附有免赔额特约条款的汽车车身险现在时刻(0)的价格推导

根据附有免赔额特约条款的汽车车身险到期现金流量 C_T 的定义,它在现在时刻(0)的价值 C 为

$$C = e^{-rT}E^Q C_T = e^{-rT}E^Q[(S_T - K)I_{S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B}] = e^{-rT}E^Q[S_T I_{S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B}] - Ke^{-rT}E^Q[I_{S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B}] \tag{6}$$

令式(6)中的第 1,2 部分为 V_1,V_2,则

$$\begin{aligned} V_1 &= e^{-rT}E^Q[S_T I_{S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B}] = \\ & e^{-rT}E^Q\left\{S_0\exp\left[\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)T+\sigma\Delta W_T^Q\right]I_{S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B}\right\} = \\ & S_0P^R(S_T\geqslant K,\bar{S}\geqslant B) = \\ & S_0[1-P^R(S_T<K)-P^R(\bar{S}<B)+P^R(S_T<K,\bar{S}<B)] \end{aligned} \tag{7}$$

又有

$$\begin{aligned} P^R(S_T<K) &= P^R\left(\ln\frac{S_T}{S_0}<\ln\frac{K}{S_0}\right) = \\ & P^R\left(\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)+\sigma\Delta W_T^R<\ln\frac{K}{S_0}\right) = \\ & P^R\left(\frac{\Delta W_T^R}{\sqrt{T}}<\frac{\ln\frac{k}{S_0}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) = N(d_1) \end{aligned} \tag{8}$$

其中,$N(\cdot)$表示标准正态分布的分布函数,$d_1=\dfrac{\left(\ln\frac{K}{S_0}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$.

利用引理 1,引理 2,类似计算可得

$$P^R(\bar{S}<B) = N(d_2) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)}N\left(d_2-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{9}$$

$$P^R(S_T<K,\bar{S}<B) = N(d_1) - \left(\frac{B}{S_0}\right)^{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)}N\left(d_1-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right) \tag{10}$$

其中,$d_2=\dfrac{\left(\ln\frac{B}{S_0}-\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$.

将式(8)(9)(10)分别代入式(7),得到

$$V_1 = S_0\left\{N(-d_2)+\left(\frac{B}{S_0}\right)^{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)}\left[N\left(d_2-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)-N\left(d_1-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right\} \tag{11}$$

V_2 的计算与 V_1 相同,只是将$\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)$换成$\left(r-\frac{1}{2}\sigma^2\right)$,可得

$$V_2 = Ke^{-rT}\left\{N(-d_4)+\left(\frac{B}{S_0}\right)^{-\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)}\left[N\left(d_4-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)-N\left(d_3-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right\} \tag{12}$$

其中,$d_3=\dfrac{\left(\ln\dfrac{K}{S_0}-\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$,$d_4=\dfrac{\left(\ln\dfrac{B}{S_0}-\left(r-\dfrac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$.

将式(11)(12)分别代入式(6),最后得到定理 1.

定理 1 附有免赔额特约条款的汽车车身险在现在(0 时刻)的价值为

$$C=S_0\left\{N(-d_2)+\left(\frac{B}{S_0}\right)^{\left(1+\frac{2r}{\sigma^2}\right)}\left[N\left(d_2-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)-N\left(d_1-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right\}-$$
$$Ke^{-rT}\left\{N(-d_4)+\left(\frac{B}{S_0}\right)^{-\left(1-\frac{2r}{\sigma^2}\right)}\left[N\left(d_4-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)-N\left(d_3-\frac{2\ln\frac{B}{S_0}}{\sigma\sqrt{T}}\right)\right]\right\} \tag{13}$$

4 结 语

2009 年我国已成为全球机动车第一大市场,随着国内汽车市场的逐渐扩大,由此带来的车险定价问题无疑是急待理论界与实务界探讨的重要课题. 此处在常数利率下,将无套利定价原理与数学领域的鞅论、随机微分方程理论结合起来,得到了附有免赔额特约条款的汽车车身险的定价公式,这是数学方法在保费计算问题中的有益尝试.

参考文献:

[1] 郁佳敏、郝旭东.索赔额服从对数正态分布的车险经验费率精算模型[J].上海交通大学学报,2008,42(11):1836-1838

[2] 赵培臣.一类离散双险种风险模型的破产概率和 Lundberg 不等式[J]. 重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(5):444-446

[3] 朱丹,杨向群.有跳-扩散违约风险的可转换债券的鞅定价[J].数学学报,2010,53(1):165-170

[4] 朱丹.随即利率下可分离交易的可转换债券定价[J].应用数学学报,2011,34(2):265-271

[5] 朱丹.附有回售条款的可转换债券的鞅定价[J].湖南师范大学学报:自然科学版,2005,28(4):23-26

[6] 洛伦兹·格利茨.金融工程学[M].唐旭,等译.北京:经济科学出版社,1998

[7] HE S,WANG J,YAN J. Semimatingale and Stochastic Calculus[M].Baca Batoa: CRC Press,1992

[8] 陈松男.金融工程学[M].上海:复旦大学出版社,2002

The Martingale Pricing of the Auto Insurance with Deductible Special Provisions

ZHU Dan

(Department of Basic Course,Hunan University of Finance and Economics,Changsha 410205,China)

Abstract: Under the hypothesis that the loss of car accidents is normal distributed,the pricing formula of the auto insurance with deductible special provisions by Martingale approach is deduced.

Key words: deductible special provisions; barrier option; martingale measure; risk-neutral valuation; Girsanov's theory