第 32 卷第 11 期　重庆工商大学学报(自然科学版)　2015 年 11 月
Vol.32　NO.11　J Chongqing Technol Business Univ.(Nat Sci Ed)　Nov.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.013

Schur 不等式的一个注记*

廖　平,赵　丹,王　龙,赵凤鸣
(四川职业技术学院 应用数学与经济系,四川 遂宁 629000)

摘　要:给出了矩阵特征值模平方和的一个上界,并证明了所得结果对某类特殊矩阵可以得到更好的界.

关键词:矩阵特征值;估计;Schur 不等式.
中图分类号:O151.2　**文献标志码**:A　**文章编号**:1672-058X(2015)11-0054-03

0　引　言

关于矩阵特征值模的平方和的一个上界,以下结果是熟知的(即 Schur 不等式)[1-3]:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \|\boldsymbol{M}\|_F^2 \tag{1}$$

其中 $\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征值,$\|\boldsymbol{M}\|_F^2=\sum\limits_{i,j}|m_{ij}|^2$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 Frobenius 范数(也称欧式范数).该不等式广泛用于矩阵的秩估计、谱估计等领域[4-7].Kress 等[3]将 Schur 不等式进一步改进,得到如下的结果:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \left\{\|\boldsymbol{M}\|_F^4-\frac{1}{2}\|\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^*-\boldsymbol{M}^*\boldsymbol{M}\|_F^2\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

其中,$\boldsymbol{M}^*$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的共轭转置矩阵.

文献[4]借助分块矩阵,对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分块如下:

$$\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix} \tag{3}$$

其中 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{k\times k}$ 为矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 k 阶主子阵,得到估计式:

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \|\boldsymbol{M}\|_F^2-(\|\boldsymbol{B}\|_F-\|\boldsymbol{C}\|_F)^2 \tag{4}$$

此处将给出 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ 一个不同的上界,并证明对于一类特殊矩阵,该上界可以较式(4)更精确.

1　矩阵特征值的估计

在这一节里,给出 $\sum\limits_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2$ 一个不同的上界.

定理 1　设 $\boldsymbol{M}$ 为任意复方阵,对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分块如式(3),设 $\boldsymbol{B}_i=(a_{i,k+1},a_{i,k+2},\cdots,a_{i,n})$ 为块矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行,$\boldsymbol{C}_i=(a_{k+1,i},a_{k+2,i},\cdots,a_{n,i})^{\mathrm{T}}$ 为块矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列,$i=1,2,\cdots,k$,且 $\|\boldsymbol{B}_i\|_F\neq 0$,$\|\boldsymbol{C}_i\|_F\neq 0$,则

收稿日期:2015-06-15;**修回日期**:2015-07-16.
* **基金项目**:四川省教育厅自然科学基金项目(13ZB0033).
作者简介:廖平(1983-),男,四川自贡人,讲师,硕士,从事应用数学研究.

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{D}\|_{\mathrm{F}}^2+2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_1\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_1\|_{\mathrm{F}}}},\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_2\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_2\|_{F}}},\cdots,\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_k\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_k\|_{\mathrm{F}}}}\right)$.

证明　令 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P} & 0\\ 0 & I_{(n-k)\times(n-k)}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_{k\times k}=\mathrm{diag}(p_1,p_2,\cdots,p_k)$,$p_i>0,i=1,2,\cdots,k$.显然 $\boldsymbol{D}$ 为可逆对角阵.令 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$,则

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^*)=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{D}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2 \tag{6}$$

又因为

$$\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\frac{|a_{ij}|^2}{p_i^2}+\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}p_i^2|a_{ji}|^2=\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=k+1}^{n}\left(\frac{|a_{ij}|^2}{p_i^2}+p_i^2|a_{ji}|^2\right)=$$

$$\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\sum_{j=k+1}^{n}|a_{ij}|^2}{p_i^2}+p_i^2\sum_{j=k+1}^{n}|a_{ji}|^2\right)=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}+p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2\right)\geqslant$$

$$\sum_{i=1}^{k}2\sqrt{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2}=2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{F} \tag{7}$$

又令

$$\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_1\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_1\|_{\mathrm{F}}}},\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_2\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_2\|_{\mathrm{F}}}},\cdots,\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{B}_k\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{C}_k\|_{\mathrm{F}}}}\right) \tag{8}$$

则式(7)可取到最小值

$$\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2=2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}} \tag{9}$$

此时,由式(6)(7)(9)即得

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^*)=\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{D}\|_{\mathrm{F}}^2+2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}} \tag{10}$$

又由矩阵 $\boldsymbol{K}$ 与矩阵 $\boldsymbol{M}$ 相似,故有相同的特征值,设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 为 $\boldsymbol{M}$ 的特征值,由式(1)则有

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\|\boldsymbol{K}\|_{\mathrm{F}}^2=\mathrm{tr}(\boldsymbol{K}\boldsymbol{K}^*) \tag{11}$$

由式(10)(11)即得式(5),证毕.

另外,即使对某个 $\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}=0$,而对应 $\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$ 的情况,虽然 $\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}+p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2=p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2\neq 2\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}=0$,对角阵 $\boldsymbol{P}$ 的 p_i 无意义,此时可取 p_i 为一个充分小的正数,从而使其无限接近 0.故不妨仍记

$$\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}+p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2=2\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}=0$$

若某个 $\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}=0$,而对应的 $\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$,此时对角阵 $\boldsymbol{P}$ 中相应的 p_i 可取一个充分大的正数,则 $\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}+p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2=\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}$ 同样无限接近 0.若某个 $\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}=\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}=0$,当然有 $\frac{\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}^2}{p_i^2}+p_i^2\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}^2=2\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}=0$.此时 p_i 可任取一正数即可.故实际应用时,定理 1 中 $\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$,$\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$ 的限制条件是可以放宽的.同时与定理 1 相同的方式,作相似变换 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{M}\boldsymbol{D}^{-1}$,可得如下定理:

定理 2　设 $\boldsymbol{M}$ 为任意复方阵,对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分块如式(3),设 $\boldsymbol{B}_i=(a_{i,k+1},a_{i,k+2},\cdots,a_{i,n})$ 为块矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行,$\boldsymbol{C}_i=(a_{k+1,i},a_{k+2,i},\cdots,a_{n,i})^{\mathrm{T}}$ 为块矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第 i 列,$i=1,2,\cdots,k$,且 $\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$,$\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}}\neq 0$,则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2\leqslant\|\boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\|_{\mathrm{F}}^2+\|\boldsymbol{D}\|_{\mathrm{F}}^2+2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_{\mathrm{F}}\|\boldsymbol{C}_i\|_{\mathrm{F}} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{P}=\mathrm{diag}\left(\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{C}_1\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{B}_1\|_{\mathrm{F}}}},\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{C}_2\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{B}_2\|_{\mathrm{F}}}},\cdots,\sqrt{\frac{\|\boldsymbol{C}_k\|_{\mathrm{F}}}{\|\boldsymbol{B}_k\|_{\mathrm{F}}}}\right)$.

下面将证明对于一类特殊矩阵,上述结果优于式(4).

定理3 设 $\boldsymbol{M}$ 为任意复方阵,对矩阵 $\boldsymbol{M}$ 分块如式(3),若块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 恰为对角阵,则

$$\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant \|\boldsymbol{A}\|_F^2+\|\boldsymbol{D}\|_F^2+2\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_F\|\boldsymbol{C}_i\|_F \leqslant \|\boldsymbol{M}\|_F^2-(\|\boldsymbol{B}\|_F-\|\boldsymbol{C}\|_F)^2 \tag{13}$$

证明 若块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 恰为对角阵,则 $\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\|_F^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2$,故式(12)左侧不等式成立.又

$$\|\boldsymbol{M}\|_F^2-(\|\boldsymbol{B}\|_F-\|\boldsymbol{C}\|_F)^2=\|\boldsymbol{A}\|_F^2+\|\boldsymbol{D}\|_F^2+2\|\boldsymbol{B}\|_F\|\boldsymbol{C}\|_F$$

欲证式(12)右侧不等式,只需证明 $\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_F\|\boldsymbol{C}_i\|_F \leqslant \|\boldsymbol{B}\|_F\|\boldsymbol{C}\|_F$.

因 $\|\boldsymbol{B}\|_F=\left(\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}$,$\|\boldsymbol{C}\|_F=\left(\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{C}_i\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}$,由 Cauchy-Schwarz 不等式即得

$$\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_F\|\boldsymbol{C}_i\|_F \leqslant \left(\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{B}_i\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{k}\|\boldsymbol{C}_i\|_F^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\boldsymbol{B}\|_F\|\boldsymbol{C}\|_F \tag{14}$$

证毕.

最后,在数值实验中发现,对一般矩阵,定理2中 $\|\boldsymbol{PAP}^{-1}\|_F^2$ 与定理1中 $\|\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}\|_F^2$ 通常是不同的,因此可取二者中较小者进行估计.

2 数值算例

例1 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}4&0&3&5\\0&2&4&1\\1&9&6&8\\9&2&7&9\end{pmatrix}$,分块后 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&0\\0&2\end{pmatrix}$,由式(1)得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 468$,由式(2)可得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 456.1710$,由式(4)可得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 434.5752$,由式(5)可得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 414.7506$.

例2 设矩阵 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}4&1&3&5\\4&2&4&1\\1&9&6&8\\9&2&7&9\end{pmatrix}$,分块后 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}4&1\\4&2\end{pmatrix}$,由式(1)得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 485$,由式(2)得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 475.7699$,由式(4)得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 451.5752$,由式(5)得 $\sum_{i=1}^{n}|\lambda_i|^2 \leqslant 434.7506$.

参考文献:

[1] HORN R A,JOHNSON H R. Matrix analysis [M]. Cambridge University Press,Cambridge,1985
[2] 詹兴致. 矩阵论[M]. 北京:高等教育出版社,2008
[3] KRESS R,VRIES H L D, WEGMANN R. On Nonnormal Matrices[J]. Linear Algebra Appl,1974(8):109-120
[4] 屠伯勋.矩阵秩的下界与方阵的非奇异性[J].复旦大学学报:自然科学版,1982,21(4):416-422
[5] 胡兴凯,邹黎敏.矩阵秩和特征值的估计[J].西南大学学报:自然科学版,2009,31(12):99-102
[6] 胡兴凯.矩阵特征值不等式[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012,29(4):23-26
[7] 廖平,王龙.Schur不等式的改进及应用[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(2):16-21

On the Schur Inequality

LIAO Ping, ZHAO Dan, WANG Long, ZHAO Feng-ming

(Department of Applied Mathematics and Economics Sichuan Vocational and Technical College,
Sichuan Suining 629000, China)

Abstract: Firstly, an upper bound is given for the sum of square modules of eigenvalues. The result is proven that it can get better bound for some special matrixes.

Key words: matrix eigenvalues; estimation; Schur inequality.