doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.011

一类乘积形式积分因子的存在条件及应用*

李耀红, 彭 颖
(宿州学院 数学与统计学院,安徽 宿州 234000)

摘 要:讨论了一阶常微分方程 $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 的积分因子问题,给出了方程具有一类形如 $f(ax^{\alpha}+bx^{s}y^{t}+cy^{\beta})g(dx^{m}y^{n})$ 乘积形式积分因子的充要条件,并结合实例说明其应用,该结果推广了相关文献的结论.

关键词:一阶常微分方程;乘积形式积分因子;充要条件;应用

中图分类号:O175.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)11-0048-03

全微分方程是一阶常微分方程中一类重要的方程,其求解方便快捷.通常只要判定某个一阶微分方程为全微分方程,其通解就能直接给出.因此寻找一阶常微分方程

$$M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{1}$$

的积分因子 $\mu(x,y)$,使得一阶常微分方程 $\mu(x,y)M(x,y)\mathrm{d}x+\mu(x,y)N(x,y)\mathrm{d}y=0$ 成为全微分方程,是一种求解方程(1)简单有效的方法.

对一些具有特殊形式的简单积分因子存在性条件,文献[1-3]进行了讨论;文献[4-7]则对一些复合型积分因子的存在性定理和计算公式进行了探讨;文献[8-10]讨论了几类具有乘积形式的积分因子的问题求解.结合上述文献的研究结果,此处讨论方程(1)具有一类形如

$$f(ax^{\alpha}+bx^{s}y^{t}+cy^{\beta})g(dx^{m}y^{n}) \tag{2}$$

乘积形式积分因子存在的充要条件,并结合实例说明上述形式积分因子的求解.

1 主要定理

引理 1[1] 连续可微函数 $\mu(x,y)\neq 0$ 为方程(1)的积分因子的充要条件是 $(\mu M)_y=(\mu N)_x$.

定理 1 方程(1)具有形如式(2)的混合型积分因子的充要条件是

$$(M_y-N_x)/\{f'(z_1)g(z_2)[(a\alpha Nx^{\alpha-1}+bsNx^{s-1}y^{t})-(c\beta My^{\beta-1}+btMx^{s}y^{t-1})]+$$

收稿日期:2015-05-16;修回日期:2015-06-20.

*基金项目:安徽省省级综合改革数学与应用数学专业项目(2012ZY46);宿州学院综合理科实践教育基地项目(SZXYSJJD201205).

作者简介:李耀红(1978-),男,湖北武汉市人,副教授,硕士,从事泛函分析研究.

$$f(z_1)g'(z_2)[mdNx^{m-1}y^n - ndMx^my^{n-1}]\} = 1/f(z_1)g(z_2) \tag{3}$$

其中 $a,b,c,d,\alpha,\beta,s,t,m,n$ 是任意常数,且 $z_1=ax^\alpha+bx^sy^t+cy^\beta$,$z_2=dx^my^n$.

证明　由引理 1 知,式(2)是方程(1)乘积形式积分因子的充要条件是$(fgM)_y=(fgN)_x$,即有 $f_ygM+fg_yM+fgM_y=f_xgN+fg_xN+fgN_x$,故有

$$f'(z_1)(btx^sy^{t-1}+c\beta y^{\beta-1})g(z_2)M+f(z_1)g'(z_2)(dnx^my^{n-1})M+f(z_1)g(z_2)M_y=$$
$$f'(z_1)(a\alpha x^{\alpha-1}+bsx^{s-1}y^t)g(z_2)N+f(z_1)g'(z_2)(dmx^{m-1}y^n)N+f(z_1)g(z_2)N_x$$

整理后立即得式(3),于是定理 1 得证.

注 1　在定理 1 中,若令 $b=0,d=1$,即得文献[8]的定理 1;若令 $g(z_2)=1$,即得文献[10]的定理 1,且进一步令 $a=c=1,b=0$,可得文献[2]的定理 1.故此处定理 1 推广了相关文献结果.

推论 1　若存在函数 $F(z_1)$使得等式

$$\frac{(M_y-N_x)}{N[a\alpha x^{\alpha-1}+bsx^{s-1}y^t]-M[c\beta y^{\beta-1}+btx^sy^{t-1}]}=F(z_1)$$

成立,则方程(1)具有积分因子 $f(z_1)=\exp\left[\int F(z_1)\mathrm{d}z_1\right]$.

下面给出方程(1)具有形如式(2)的乘积形式积分因子的求解方法.

定理 2　若方程

$$g(z_2)M(x,y)\mathrm{d}x+g(z_2)N(x,y)\mathrm{d}y=0 \tag{4}$$

满足

$$\frac{g(z_2)(M_y-N_x)+g'(z_2)d[nMx^my^{n-1}-mNx^{m-1}y^n]}{g(z_2)\{N[a\alpha x^{\alpha-1}+bsx^{s-1}y^t]-M[c\beta y^{\beta-1}+btx^sy^{t-1}]\}}=F(z_1) \tag{5}$$

则方程(4)具有积分因子 $f(z_1)=\exp\left[\int F(z_1)\mathrm{d}z_1\right]$,于是方程(1)具有积分因子 $\mu=g(z_2)\exp\left[\int F(z_1)\mathrm{d}z_1\right]$.

证明　由推论 1 直接可得结果,证明过程从略.

注 2　将式(5)重新整理可得

$$\frac{F(z_1)\{M[c\beta y^{\beta-1}+btx^sy^{t-1}]-N[a\alpha x^{\alpha-1}+bsx^{s-1}y^t]\}+(M_y-N_x)}{d[mNx^{m-1}y^n-nMx^my^{n-1}]}=\frac{g'(z_2)}{g(z_2)} \tag{6}$$

观察可知,通过选取恰当的函数 $F(z_1)$使得式(6)右端仅为与 z_2 相关的函数,从而可确定出函数 $f(z_1)$,进而求出原方程对应的积分因子.

从注 2 中可以得到求乘积形式积分因子(2)的具体求法,即简化为如下两个步骤完成:

1) 从满足式(5)的充要条件表达式中推导出函数 $g(z_2)$应满足的关系式,选取恰当的 $F(z_1)$,确定出 $g(z_2)$;

2) 求方程(4)中具有形如 $f(z_1)$的积分因子,进而确定方程(1)的积分因子 $f(z_1)g(z_2)$.

2　应用举例

例 1　求解微分方程 $3y\mathrm{d}x+\frac{x(2+3y)}{1+y}\mathrm{d}y=0$.

解 设 $M(x,y)=3y$, $N(x,y)=\dfrac{x(2+3y)}{1+y}$,取式(2)中 $a=b=\alpha=s=t=d=m=n=1$, $c=0$,则有 $z_1=x+xy$, $z_2=xy$,由定理 2 可知

$$\frac{F(z_1)\{M[c\beta y^{\beta-1}+btx^s y^{t-1}]-N[a\alpha x^{\alpha-1}+bsx^{s-1}y^t]\}+(M_y-N_x)}{d[mNx^{m-1}y^n-nMx^m y^{n-1}]}=\frac{F(z_1)(-2x)+\dfrac{1}{1+y}}{\dfrac{-xy}{1+y}}$$

此时可选取 $F(z_1)=\dfrac{1}{z_1}=\dfrac{1}{x+xy}$,则 $g(z_2)=z_2=xy$,于是方程有乘积形式的积分因子 $\mu=g(z_2)\exp\left[\int F(z_1)\mathrm{d}z_1\right]=xy(x+xy)$,用积分因子乘方程两端,可得方程的通解为 $x^3y^2+x^3y^3=C$, C 为任意常数.

参考文献:

[1] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社,2006

[2] 张玮玮.关于一类特殊一阶常微分方程积分因子的探讨[J].安庆师范学院学报:自然科学版,2014,20(2):10-11

[3] 王景艳.几类特殊积分因子存在的充要条件及其应用[J].保山学院学报,2014,33(2):53-55

[4] 李耀红,张海燕.几类微分方程的积分因子存在定理[J].巢湖学院学报,2006,8(3):8-9

[5] 李耀红,陈浩.对微分方程复合型积分因子问题的推广[J].黄山学院学报,2006,8(3):11-12

[6] 张海燕,戴扬,陈洁. 新复合型积分因子的存在定理及应用[J].皖西学院学报,2007,23(2):7-9

[7] 陈星海,李璜,韩祥临.三类复合型积分因子的充分必要条件及其应用[J].湖州师范学院学报,2010,32(2):44-49

[8] 彭艳芳,黄春妙.一阶常微分方程具有乘积形式形如 $f(x^\alpha y^\beta)g(ax^s+by^t)$ 积分因子的求解[J].孝感学院学报,2008,28(6):33-34

[9] 徐彬.一阶常微分方程具有一种乘积形式积分因子的求解[J].黄冈师范学院学报,2009,29(3):13-15

[10] 韩祥临,陈星海.一类积分因子的存在条件及应用[J].高等数学研究,2012,15(3):11-12

Existence Condition of Integral Factor of the Product Form and Its Application

LI Yao-hong, PENG Ying

(School of Mathematics and Statistics, Suzhou University, Anhui Suzhou 234000, China)

Abstract: This paper discusses the problem of integral factor for first order differential equation $M(x,y)\mathrm{d}x+N(x,y)\mathrm{d}x=0$, and gives a sufficient and necessary condition of integral factor of the product form of $f(ax^\alpha+bx^s y^t+cy^\beta)g(dx^m y^n)$. The application of this method is illustrated by example. Moreover, the result obtained amplifies the conclusions in the relevant reference.

Key words: first order differential equations; integral factor of the product form; sufficient and necessary condition; application