doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.010

方程 $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2$ 的正整数解

热伊麦·阿卜杜力木
(喀什大学 数学与统计学院,新疆 喀什 844008)

摘 要:讨论了方程 $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2$ 的正整数解问题,利用初等方法给出了方程的全部 17 个正整数解,其中 $\varphi(x)$ 为 Euler 函数.

关键词:Euler 函数;正整数解;初等方法

中图分类号:O156 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)11-0043-05

Euler 函数 $\varphi(n)$ 是定义在正整数 n 上的函数,它在正整数 n 上的值等于序列 $0,1,2,\cdots,n-1$ 中与 n 互素的整数的个数[1].关于 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的研究是数论中十分重要且有意义的研究课题之一[2].对于包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的数论函数方程的可解性问题,许多学者进行了研究.2005 年,乐茂华[3]讨论了方程 $\varphi(x)=2t$ 的可解性问题;2006 年,吕志宏[4]讨论了方程 $\varphi(\varphi(x))=2^{\omega(x)}$ 的可解性问题,给出了该方程的全部 20 个正整数解,其中 $\omega(x)$ 为正整数 x 的相异素因子个数;2007 年,陈国慧[5]讨论了方程 $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2^{\omega(x)}$ 的可解性问题,给出了其全部的 59 个解;2009 年,马静[6]讨论了方程 $\varphi(n)=2^{t\omega(n)}(t\in\mathbf{Z}^+)$ 的可解性问题;2010 年,田呈亮[7]等讨论了方程 $\varphi(\varphi(x))=2^{\Omega(x)}$ 的可解性问题,其中当 $x=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$ 的标准分解式时,定义 $\Omega(x)$ 为 $\Omega(1)=0$, $\Omega(x)=\sum\limits_{i=1}^{k}\alpha_i$;2012 年,孙翠芳[8]等讨论了 $n-\varphi(n)=2^{\Omega(n)}$, $n-\varphi(\varphi(n))=2^{\Omega(n)}$, $\varphi(n-\varphi(n))=2^{\Omega(n)}$ 这 3 个方程的可解性问题;2014 年,多布杰[9]讨论了方程 $\varphi(\varphi(x))=2t$ 的可解性问题.

此处主要讨论了方程

$$\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2 \tag{1}$$

的正整数解问题,利用初等的方法给出了其全部的正整数解.

1 引 理

引理 1[10] 当 $n\geqslant 3$ 是整数时,$\varphi(n)$ 为偶数.

引理 2[11] 方程 $\varphi(x)=2P$ 的解 x 为

$$\begin{cases} x=3,4,6 & P=1 \\ x=5,8,10,12 & P=2 \\ x=7,9,14,18 & P=3 \end{cases}$$

2 结论及其证明

定理 1 方程(1)的正整数解为 $x=11,13,15,16,19,20,21,22,24,26,27,28,30,36,38,42,54$,共有

收稿日期:2015-06-04;**修回日期**:2015-07-16.

作者简介:热伊麦·阿卜杜力木(1993-),女,维吾尔族人,新疆轮台人,从事基础数学研究.

17 个.

证明 设 $x=2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t}$是方程(1)的正整数解,其中 $q_i(i=1,2,\cdots,t)$是满足 $2<q_1<q_2<\cdots<q_t$ 的素数,$\alpha,\beta_i(i=1,2,\cdots,t)$,$t$ 都是非负整数.由于 $\varphi(n)$为积性函数,则有

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t}))) &= \varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha})\varphi(q_1^{\beta_1})\varphi(q_2^{\beta_2})\cdots\varphi(q_t^{\beta_t}))) = \\ &\varphi(\varphi(2^{\alpha-1}q_1^{\beta_1-1}\cdots q_t^{\beta_t-1}(q_1-1)\cdots(q_t-1))) \geqslant \\ &\varphi(\varphi((q_1-1)\cdots(q_t-1))) = \varphi(\varphi(2^t\cdot\frac{q_1-1}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{q_t-1}{2})) \geqslant \\ &\varphi(\varphi(2^t)) = \varphi(2^{t-1}) = 2^{t-2}\end{aligned}$$

当 $t\geqslant 4$ 时,$\varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t})))>2$,因而,此处只需考虑 $0\leqslant t\leqslant 3$ 的情况.

同样,由于 $\varphi(n)$为积性函数,则有

$$\begin{aligned}\varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t}))) &= \varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha})\varphi(q_1^{\beta_1})\varphi(q_2^{\beta_2})\cdots\varphi(q_t^{\beta_t}))) = \\ &\varphi(\varphi(2^{\alpha-1}q_1^{\beta_1-1}\cdots q_t^{\beta_t-1}(q_1-1)\cdots(q_t-1))) \geqslant \\ &\varphi(\varphi(2^{\alpha-1})) = \varphi(2^{\alpha-2}) = 2^{\alpha-3}\end{aligned}$$

当 $\alpha\geqslant 5$ 时,$\varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}\cdots q_t^{\beta_t})))>2$,因而,此处只需考虑 $0\leqslant\alpha\leqslant 4$ 的情况.

情况Ⅰ 当 $t=0$,此时 $x=2^{\alpha}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2^{\alpha}))) = \varphi(\varphi(2^{\alpha-1})) = \varphi(2^{\alpha-2}) = 2^{\alpha-3} = 2$$

从而可得 $\alpha=4$,进而有 $x=16$ 是方程(1)的正整数解.

情况Ⅱ 当 $t=1$,此时 $x=2^{\alpha}q^{\beta}$,现对 α,β 的值进行讨论.

情况 1 $\alpha=0,\beta=1$,此时 $x=q$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q))) = \varphi(\varphi(q-1)) = 2$$

由引理 2 可得,$\varphi(q-1)=3$ 或 $\varphi(q-1)=4$ 或 $\varphi(q-1)=6$.由引理 1 可得,$\varphi(q-1)=3$ 是不可能成立的.

当 $\varphi(q-1)=4$ 时,有 $q-1=5,8,10,12$,即有 $q=11,13$,因而 $x=11,13$ 是方程(1)的 2 个正整数解.

当 $\varphi(q-1)=6$ 时,有 $q-1=7,9,14,18$,即有 $q=19$,因而 $x=19$ 是方程(1)的正整数解.

情况 2 $\alpha=0,\beta=2$,此时 $x=q^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q^2))) = \varphi(\varphi(q^2-q)) = \varphi((q-1)\varphi(q-1)) = 2$$

由引理 2 可得,$(q-1)\varphi(q-1)=3$ 或$(q-1)\varphi(q-1)=4$ 或$(q-1)\varphi(q-1)=6$.由于 q 为奇素数,从而方程$(q-1)\varphi(q-1)=3,4,6$ 都无正整数解,因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 3 $\alpha=0,\beta=3$,此时 $x=q^3$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q^3))) = \varphi(\varphi(q^3-q^2)) = \varphi((q^2-q)\varphi(q-1)) = 2$$

由引理 2 可得,$(q^2-q)\varphi(q-1)=3$ 或$(q^2-q)\varphi(q-1)=4$ 或$(q^2-q)\varphi(q-1)=6$.由于 q 为奇素数,从而方程$(q^2-q)\varphi(q-1)=3,4$ 都无正整数解.当$(q^2-q)\varphi(q-1)=6$ 时,有 $q=3$.因而,此时 $x=3^3=27$ 是方程(1)的正整数解.

情况 4 $\alpha=0,\beta\geqslant 4$,此时 $x=q^{\beta}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q^{\beta}))) = \varphi(\varphi(q^{\beta}-q^{\beta-1})) = \varphi((q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(q-1)) = 2$$

由引理 2 可得,$(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(q-1)=q^{\beta-2}(q-1)\varphi(q-1)=3,4,6$.由于 q 为奇素数,$\beta-2\geqslant 2$,从而方程$(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(q-1)=q^{\beta-2}(q-1)\varphi(q-1)=3,4,6$ 都无正整数解.因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 5 $\alpha=1,\beta=1$,此时 $x=2q$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q))) = \varphi(\varphi(q-1)) = 2$$

由情况 1 的讨论可知,此时,$x=22,26,38$ 是方程(1)的 3 个正整数解.

情况 6 $\alpha=1,\beta=2$,此时 $x=2q^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q^2))) = \varphi(\varphi(q^2-q)) = \varphi((q-1)\varphi(q-1)) = 2$$

由情况 2 的讨论可知,此时方程(1)无正整数解.

情况 7　$\alpha=1,\beta=3$,此时 $x=2q^3$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q^3)))=\varphi(\varphi(q^3-q^2))=\varphi((q^2-q)\varphi(q-1))=2$$

由情况 3 的讨论可知,此时,$x=54$ 是方程(1)的正整数解.

情况 8　$\alpha=1,\beta\geqslant 4$,此时 $x=2q^\beta$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q^\beta)))=\varphi(\varphi(q^\beta-q^{\beta-1}))=\varphi((q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(q-1))=2$$

由情况 4 的讨论可知,此时,方程(1)无正整数解.

情况 9　$\alpha=2,\beta=1$,此时 $x=4q$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(4q)))=\varphi(\varphi(2(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$\varphi(2(q-1))=3$ 或 $\varphi(2(q-1))=4$ 或 $\varphi(2(q-1))=6$.由引理 1 可知,$\varphi(2(q-1))=3$ 无正整数解.

当 $\varphi(2(q-1))=4$ 时,有 $2(q-1)=5,8,10,12$.从而有 $q=5,7$,从而 $x=20,28$ 是方程(1)的 2 个正整数解.

当 $\varphi(2(q-1))=6$ 时,有 $2(q-1)=7,9,14,18$.此时方程(1)无正整数解.

情况 10　$\alpha=2,\beta=2$,此时 $x=4q^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(4q^2)))=\varphi(\varphi(2(q^2-q)))=\varphi((q-1)\varphi(2(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q-1)\varphi(2(q-1))=3,4,6$.此时,有 $q=3$,进而 $x=36$ 是方程(1)的正整数解.

情况 11　$\alpha=2,\beta=3$,此时 $x=4q^3$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(4q^3)))=\varphi(\varphi(2(q^3-q^2)))=\varphi((q^2-q)\varphi(2(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q^2-q)\varphi(2(q-1))=3,4,6$.此时方程(1)无正整数解.

情况 12　$\alpha=2,\beta\geqslant 4$,此时 $x=4q^\beta$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(4q^\beta)))=\varphi(\varphi(2(q^\beta-q^{\beta-1})))=\varphi((q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(2(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(2(q-1))=3,4,6$.由于 q 为奇素数,$\beta-2\geqslant 2$,从而方程 $(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(2(q-1))=3,4,6$ 都无正整数解.因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 13　$\alpha=3,\beta=1$,此时 $x=8q$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(8q)))=\varphi(\varphi(4(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$\varphi(4(q-1))=3,4,6$.由引理 1 可得,$\varphi(4(q-1))=3$ 是不可能成立的.由引理 2 可得,当 $\varphi(4(q-1))=4$ 时,有 $4(q-1)=5,8,10,12$,此时有 $q=3$,从而方程(1)有正整数解 $x=24$.当 $\varphi(4(q-1))=6$ 时,有 $4(q-1)=7,9,14,18$,显然其无正整数解,因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 14　$\alpha=3,\beta=2$,此时 $x=8q^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(8q^2)))=\varphi(\varphi(4(q^2-q)))=\varphi((q-1)\varphi(4(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q-1)\varphi(4(q-1))=3,4,6$.由于不存在奇素数 q,使得 $(q-1)\varphi(4(q-1))=3,4,6$ 成立,因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 15　$\alpha=3,\beta=3$,此时 $x=8q^3$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(8q^3)))=\varphi(\varphi(4(q^3-q^2)))=\varphi((q^2-q)\varphi(4(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q^2-q)\varphi(4(q-1))=3,4,6$.由于不存在奇素数 q,使得 $(q^2-q)\varphi(4(q-1))=3,4,6$ 成立,因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 16　$\alpha=3,\beta\geqslant 4$,此时 $x=8q^\beta$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(8q^\beta)))=\varphi(\varphi(4(q^\beta-q^{\beta-1})))=\varphi((q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(4(q-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(4(q-1))=3,4,6$.由于 q 为奇素数,$\beta\geqslant 4$,因而 $(q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(4(q-1))=3,4,6$ 无正整数解,因而,此时方程(1)无正整数解.

情况 17　$\alpha=4$,此时 $x=2^\alpha q^\beta$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2^4q^{\beta})))=\varphi(\varphi(8(q^{\beta}-q^{\beta-1})))=\varphi((q^{\beta-1}-q^{\beta-2})\varphi(8(q-1)))\ >\varphi(\varphi(8))=2$$

因而,此时方程(1)无正整数解.

情况Ⅲ 当 $t=2$,此时 $x=2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}$.现对 $\alpha,\beta_i(i=1,2)$ 的值分以下情况进行讨论.

情况 1 $\alpha=0,\beta_1=1,\beta_2=1$,此时 $x=q_1q_2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1q_2)))=\varphi(\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得,$\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.由引理 1 可得,$\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3$ 不可能成立.当 $\varphi((q_1-1)(q_2-1))=4$ 时,有 $(q_1-1)(q_2-1)=5,8,10,12$,此时有 $\begin{cases}q_1=3\\q_2=5\end{cases}$ 或 $\begin{cases}q_1=3\\q_2=7\end{cases}$,因而,此时方程(1)有正整数解 $x=15,21$.当 $\varphi((q_1-1)(q_2-1))=6$ 时,有 $(q_1-1)(q_2-1)=7,9,14,18$,此时方程(1)无正整数解.

情况 2 $\alpha=0,\beta_1=1,\beta_2=2$,此时 $x=q_1q_2^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1q_2^2)))=\varphi((q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.此时,不存在奇素数 q_1,q_2 使得其成立,因而方程(1)无正整数解.同理,对于 $\alpha=0,\beta_1=2,\beta_2=1$ 的情况,方程(1)无正整数解.

情况 3 $\alpha=0,\beta_1=1,\beta_2\geqslant3$,此时 $x=q_1q_2^{\beta_2}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1q_2^{\beta_2})))=\varphi((q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.此时,不存在奇素数 q_1,q_2 使得其成立,因而方程(1)无正整数解.同理,对于 $\alpha=0,\beta_1\geqslant3,\beta_2=1$ 的情况,方程(1)无正整数解.

情况 4 $\alpha=0,\beta_1=2,\beta_2=2$,此时 $x=q_1^2q_2^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1^2q_2^2)))=\varphi((q_1-1)(q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q_1-1)(q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.显然不存在奇素数 q_1,q_2 使得其成立,因而方程(1)无正整数解.

情况 5 $\alpha=0,\beta_1=2,\beta_2\geqslant3$,此时 $x=q_1^2q_2^{\beta_2}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1^2q_2^{\beta_2})))=\varphi((q_1-1)(q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得,$(q_1-1)(q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.显然不存在奇素数 q_1,q_2 使得其成立,因而方程(1)无正整数解.同理,对于 $\alpha=0,\beta_1\geqslant3,\beta_2=2$,方程(1)无正整数解.结合 $\alpha=0,\beta_1=2,\beta_2\geqslant3$ 与 $\alpha=0,\beta_1\geqslant3,\beta_2=2$ 这 2 种情况可得,当 $\alpha=0,\beta_1\geqslant3,\beta_2\geqslant3$ 情况时,方程(1)无正整数解.

情况 6 $\alpha=1,\beta_1=1,\beta_2=1$,此时 $x=2q_1q_2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q_1q_2)))=\varphi(\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由情况 1 的讨论可得,此时方程(1)有正整数解 $x=30,42$.

情况 7 $\alpha=1,\beta_1=1,\beta_2=2$,此时 $x=2q_1q_2^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q_1q_2^2)))=\varphi((q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由情况 2 的讨论可得,此时方程(1)无正整数解.同理,在情况 $\alpha=1,\beta_1=2,\beta_2=1$ 下,方程(1)无正整数解.

情况 8 $\alpha=1,\beta_1=1,\beta_2\geqslant3$,此时 $x=2q_1q_2^{\beta_2}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q_1q_2^{\beta_2})))=\varphi((q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由情况 3 的讨论可得,此时方程(1)无正整数解.同理,在情况 $\alpha=1,\beta_1=2,\beta_2=1$ 下,方程(1)无正整数解.同理,在情况 $\alpha=1,\beta_1\geqslant3,\beta_2=1$ 下,方程(1)无正整数解.

情况 9 $\alpha=1,\beta_1=2,\beta_2=2$,此时 $x=2q_1^2q_2^2$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q_1^2q_2^2)))=\varphi((q_1-1)(q_2-1)\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由情况 4 的讨论可得,此时方程(1)无正整数解.

情况 10 $\alpha=1,\beta_1=2,\beta_2\geqslant3$,此时 $x=2q_1^2q_2^{\beta_2}$,则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(2q_1^2q_2^{\beta_2})))=\varphi((q_1-1)(q_2^{\beta_2-1}-q_2^{\beta_2-2})\varphi((q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由情况 5 的讨论可知，此时方程(1)无正整数解.同理，对于 $\alpha=0,\beta_1\geqslant 3,\beta_2=2$，方程(1)无正整数解.结合 $\alpha=1,\beta_1=2,\beta_2\geqslant 3$ 与 $\alpha=1,\beta_1\geqslant 3,\beta_2=2$ 这 2 种情况可得，当 $\alpha=1,\beta_1\geqslant 3,\beta_2\geqslant 3$ 情况时，方程(1)无正整数解.

情况 11　$\alpha=2,\beta_1=1,\beta_2=1$，此时 $x=4q_1q_2$，则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1q_2)))=\varphi(\varphi(2(q_1-1)(q_2-1)))=2$$

由引理 2 可得，$\varphi(2(q_1-1)(q_2-1))=3,4,6$.由引理 1 可得，$\varphi(2(q_1-1)(q_2-1))=3$ 不可能成立.当 $\varphi(2(q_1-1)(q_2-1))=4$ 时，有 $2(q_1-1)(q_2-1)=5,8,10,12$，此时不存在满足 $q_1<q_2$ 的奇素数 q_1,q_2 使得 $2(q_1-1)(q_2-1)=5,8,10,12$ 成立，此时方程(1)无正整数解.通过对这一情况的讨论可知，对于以下 6 种情况：$\alpha=2,\beta_1=1,\beta_2=2$ 与 $\alpha=2,\beta_1=2,\beta_2=1$ 与 $\alpha=2,\beta_1=2,\beta_2=2$ 与 $\alpha=2,\beta_1=2,\beta_2\geqslant 3$ 与 $\alpha=2,\beta_1\geqslant 3,\beta_2=2$ 与 $\alpha=2,\beta_1\geqslant 3,\beta_2\geqslant 3$，方程(1)无正整数解.

至于 $t=2$ 时有关 $\alpha=3$ 与 $\alpha=4$ 的情况，可通过以上类似的方法得到方程(1)无正整数解，此处不再赘述.

情况Ⅳ　当 $t=3$，此时，$x=2^{\alpha}q_1^{\beta_1}q_2^{\beta_2}q_3^{\beta_3}$，对于 $t=3$ 的这一情况，这里只考虑 $\alpha=0,\beta_1=1,\beta_2=1,\beta_3=1$ 这一最简单的情况，至于其他情况可以相类似的得到.

当 $\alpha=0,\beta_1=1,\beta_2=1,\beta_3=1$ 时，$x=q_1q_2q_3$，则有

$$\varphi(\varphi(\varphi(q_1q_2q_3)))=\varphi(\varphi((q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)))=2$$

由引理2 可得，$\varphi((q_1-1)(q_2-1)(q_3-1))=3,4,6$.由引理 1 可得，$\varphi((q_1-1)(q_2-1)(q_3-1))=3$ 不可能成立.当 $\varphi((q_1-1)(q_2-1)(q_3-1))=4$ 时，有 $(q_1-1)(q_2-1)(q_3-1)=5,8,10,12$，显然不存在 3 个互不相同的奇素数使得其成立，此时方程(1)无正整数解.同理，当 $\varphi((q_1-1)(q_2-1)(q_3-1))=6$ 时，方程(1)无正整数解.同理，对于这一情况中有关 $\alpha,\beta_1,\beta_2,\beta_3$ 其他取值的情况，可以得到方程(1)无正整数解.

综合以上讨论可得，方程(1)有正整数解 $x=11,13,15,16,19,20,21,22,24,26,27,28,30,36,38,42,54$. 证毕.

参考文献：

[1] 闵嗣鹤，严士健.初等数论[M].3 版.北京：高等教育出版社，2003

[2] 盖伊 R K.数论中未解决的问题[M].3 版.北京：科学出版社，2007

[3] 乐茂华.关于方程 $\varphi(x)=2t$ [J].周口师范学院学报，2005，22(5)：18-82

[4] 吕志宏.一个包含 Euler 函数的方程[J].西北大学学报：自然科学版，2006，36(1)：17-20

[5] 陈国慧.一个包含 Euler 函数的方程[J].纯粹数学与应用数学，2007，23(4)：439-445

[6] 马静.方程 $\varphi(n)=2^{t\omega(n)}(t\in Z^{+})$ 的解[J].安徽师范大学学报，2009，32(1)：23-26

[7] 田呈亮，付静，白维祖.一个包含欧拉函数的方程[J].纯粹数学与应用数学，2010，26(1)：96-98

[8] 孙翠芳，程智.若干包含 Euler 函数 $\varphi(n)$ 的方程[J].吉林大学学报：理学版，2012，50(5)：859-862

[9] 多布杰.关于欧拉函数方程 $\varphi(\varphi(x))=2t$ 的可解性[J].纯粹数学与应用数学，2014，30(6)：564-568

[10] ROSEN K H.Elementary Theory and Its Applications[M].5th ed.Pearson Educatin，Inc，Addison Wesley，2005

[11] 姜友谊.关于 Euler 函数方程 φ(x)=m 的解[J].重庆工业管理学院学报，1998，12(5)：91-94

Positive Integer Solutions of Equation $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2$

Rahima · Abdilim

(School of Mathematics and Statistics，Kashgar University，Xinjiang Kashgar 844008，China)

Abstract：The positive integer solutions of equation $\varphi(\varphi(\varphi(x)))=2$ are discussed，and the all 17 positive integer solutions of this equation are given by elementary method，where $\varphi(x)$ is Euler function.

Key words：Euler function；positive integer solutions；elementary method