

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.005

平板折叠桌的优化设计模型*

李旭¹, 王世朋², 刘家保³

(1.合肥学院 数学与物理系,合肥 230601; 2.合肥市第七中学,合肥 230088; 3.安徽新华学院 公共课教学部,合肥 230088)

摘要:针对不同形状和大小的折叠桌,通过对桌面周围木条往下移动撑起桌面所发生的动态变化过程进行研究,得到相应模型和加工参数,并利用 MATLAB 软件工具,模拟创意折叠桌的动态变化。

关键词:MATLAB; 折叠桌; 优化设计; 数学模型

中图分类号:TP391 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-058X(2015)11-0022-05

某公司生产一种可折叠的桌子^[1,2],为了增大有效使用面积,以长方形木板的宽为直径截取了一个圆形作为桌面,桌腿随着铰链的活动可以平摊成一张平板.桌腿由若干根木条组成,分成两组,每组各用一根钢筋将木条连接,钢筋两端分别固定在桌腿各组最外侧的两根木条上,并且沿木条有空槽以保证滑动的自由度.使用者只需提起木板的两侧,便可以在重力的作用下达达到自动升起的效果,相互交叉的木梁宛如下垂的桌布,桌子外形由直纹曲面构成,造型美观.

1 目标任务

问题 1 给定长方形平板尺寸为 $120\text{ cm} \times 50\text{ cm} \times 3\text{ cm}$,每根木条宽 2.5 cm ,连接桌腿木条的钢筋固定在桌腿最外侧木条的中心位置,折叠后桌子的高度为 53 cm .建立模型分析折叠桌的加工参数.

问题 2 对于任意给定的折叠桌高度和圆形桌面直径的设计要求,讨论长方形平板材料和折叠桌的最优设计加工参数,例如平板尺寸、钢筋位置、开槽长度.

问题 3 根据任意设定的折叠桌高度、桌面边缘线的形状大小和桌脚边缘线的大致形状,给出所需平板材料的形状尺寸和切实可行的最优设计加工参数,使得生产的折叠桌尽可能接近客户期望的形状.

2 问题的分析与建模

2.1 问题 1 分析与求解

如图 1 所示,将桌面放在水平面上,以圆形桌面下表面圆的圆心为坐标原点,平行桌腿木条的方向为 y 轴, z 轴垂直于桌面,建立空间直角坐标系^[3,4].

收稿日期:2015-04-25;修回日期:2015-05-27.

*基金项目:合肥学院自然科学研究项目(13KY04ZR);国家级大学生创新创业训练计划项目(201312216030, 201312216031,201312216032,201312216033).

作者简介:李旭(1982-),男,安徽六安人,讲师,硕士,从事智能算法理论及应用研究.

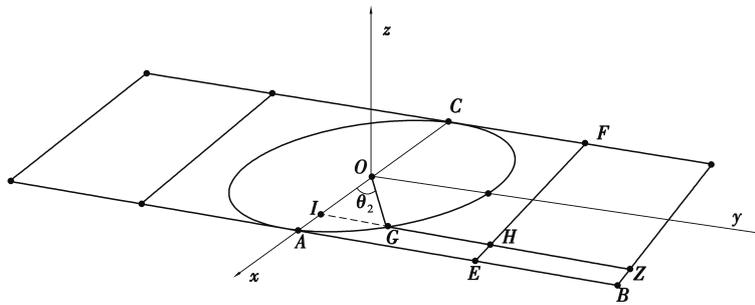


图 1 建立的空间直角坐标系

把桌面所在的圆分为等分点,每一等分点与木条连接,利用此特点求出各个木条与圆连接点的坐标 $G_i(\frac{M}{2}\cos\theta_i, \frac{M}{2}\sin\theta_i, 0)$, 其中 M 表示圆桌的直径长度,每个木条的宽度记作 A . 同时,转动钢筋轴到一定程度(图 2),以最外面的木条所转过的角度(α)为参数,求出木条在该状态下与钢筋轴交点的坐标,再利用解三角形的方法求出每根木条所转动的角度(c_i). 在木板平摊的情况下,用木板长度的一半减去相应弦长的一半,求出每根木条的长度(d_i). 综合以上,求出每根木条外端点的坐标 $ZB_i(\frac{M}{2}\cos\theta_i, \frac{M}{2}\cos\theta_i + d_i\cos c_i, d_i\sin(\pi - c_i))$, 再与相应的圆上的连接点连接成线段,用 Matlab 软件做出在每一根木条旋转一定角度后所在的曲面状态图(图 3). 根据已知条件可以确定最外边的木条最大的旋转角度 α 为

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{50}{60}\right) = 56.4^\circ$$

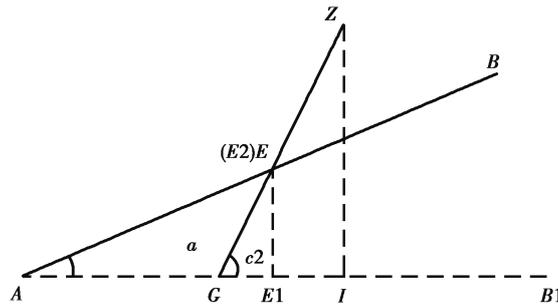


图 2 折叠桌旋转 α 角度后的状态图

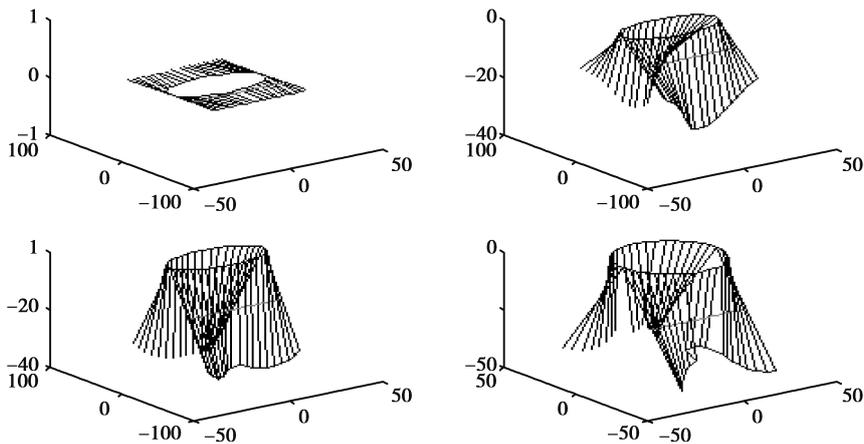


图 3 折叠桌旋转状态图

在木板平铺的情况下,用钢筋轴 EF 与线段 AC 的距离减去相应的木条所对应的半弦长(L_i),求出平摊的情况下每根木条在桌面上的连接点到钢筋轴的距离.在转动到最大角度的情况之下,利用空间中两点间的距离,求出每根木条在桌面的连接点到其在钢筋轴上的连接点之间的距离.两者之间相减,得出每根木条的开槽长度 $D_i'' = D_i - D_i'$,其中 D_i 表示第 i 根木条分别与桌面圆和钢筋轴交点之间的距离; D_i' 表示第 i 根木条在钢筋轴上的交点与圆桌上的交点的距离.

利用以上模型,可得出每个木条端点的坐标表达式:

$$\begin{cases} zb_{ix} = \frac{M}{2} - (i - 1)A \\ zb_{iy} = L_i - d_i \cos(\pi - c_i) \\ zb_{iz} = d_i \sin(\pi - c_i) \end{cases}$$

从而表示出桌腿成形后的桌腿边缘线.

2.2 问题 2 分析与求解

当桌子高度一定时,最外侧桌腿越短,用材越少,也就是最外侧桌腿旋转到最终位置时的旋转角越大,用材越少,在考虑用材时也要保证桌子的稳定性.经过定性分析,当最终位置为圆形桌面在地面的投影为 4 只支撑桌腿的内切圆时,桌子最稳定,且保证了用材较少.此时如图 4,可以根据已知条件求得最外侧桌腿旋

转角 $\varphi = \arctan \frac{2h}{d}$,木板长度 $L = 2\sqrt{h^2 + (\frac{d}{2})^2}$.

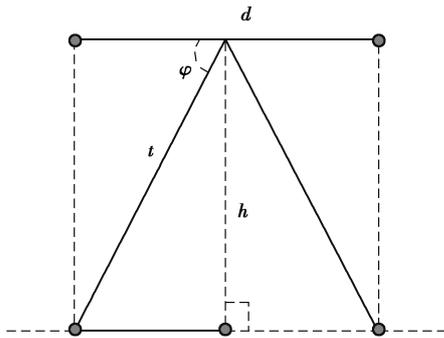


图 4 折叠桌正视图

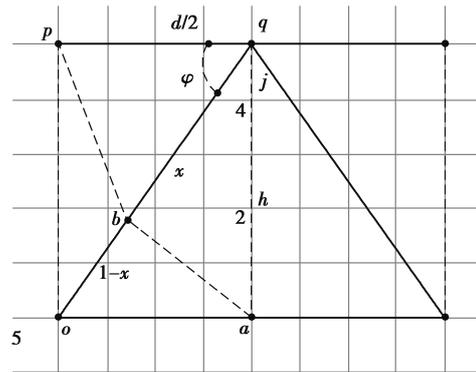


图 5 折叠桌正视图

现在考虑加工方便,也就是考虑开槽长度和木条数目,在图 5 中,设钢筋固定在最外侧桌腿上位置到最外侧桌腿与圆面交点的距离为 x (钢筋不能固定到圆面上去了,故 $x > d/2$),且认为在折叠桌撑到最终状态

时,中间桌腿的顶端恰好与钢筋接触.然后根据余弦定理表示出 $x = \sqrt{t^2 - dt + \left(\frac{1}{2}d \cos \varphi\right)^2} + \frac{1}{2}d \cos \varphi$.在 x 的取值约束条件下,求开槽总长度的最小的非线性规划目标函数^[5,6]:

$$\begin{aligned} \min \sum_{i=1}^k l_i &= \min \sum_{i=1}^k (D_i - E_i) \\ \text{s.t.} \quad &\begin{cases} x \geq \frac{d}{2} \\ x \leq \sqrt{t^2 - dt + \left(\frac{1}{2}d \cos \varphi\right)^2} + \frac{1}{2}d \cos \varphi \end{cases} \end{aligned}$$

其中 E_i 为桌腿旋转后第 i 根木条与桌面以及钢筋轴交点之间的距离.

根据问题 1 方法,求出每根桌腿上的开槽长表达式 $l_i = D_i - E_i$, 然后写出 k 根木条的总开槽长度的 $\frac{1}{4}$:

$$\sum_{i=1}^k l_i = \sum_{i=1}^k (D_i - E_i)$$

利用 Matlab 编程^[7,8]得到曲线如图 6 所示.从图 6 可以看出当木条宽度为 5 cm 时,此时目标函数达到最优,值为 170.1 cm,同时运行程序可得 $x = 40.918$ cm,则木条的个数为 16 根.

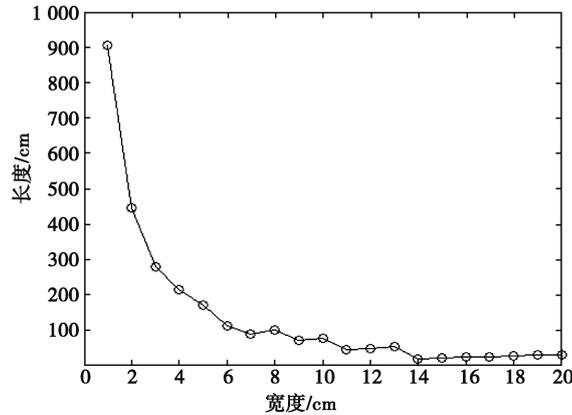


图 6 宽度与槽长的相关曲线

2.3 问题 3 分析与求解

根据不同的桌面边缘形状,确定不同的桌面边缘曲线,而根据桌面的宽度 d 以及高度 h 确定平板长度 L ,宽度 M .

假设木条的数量为 n ,则每根木条的宽度 $N = M/n$,第 i 个木条在圆桌表面的 x 轴标 G_{ix} 可以根据木条的宽度求得,而第 i 个木条在圆桌表面的 y 轴坐标 G_{iy} 则由桌面边缘曲线方程决定.即

$$G_{ix} = \frac{M}{2} - (i - 1) \times A$$

$$G_{ix} = F(G_{iy})$$

由问题 1 的模型可以得出

$$\begin{cases} zb_{ix} = \frac{M}{2} - (i - 1)A \\ zb_{iy} = L_i - d_i \cos(\pi - c_i) \\ zb_{iz} = d_i \sin(\pi - c_i) \end{cases}$$

可得到桌脚边缘的变化曲线,因为桌面边缘上的点距离桌面中心轴的大小与桌面边缘的形状有关,所以桌脚边缘形状会随着桌面边缘的形状变化而变化.

由问题 2 得出的结论可知,当 4 个支点形成的矩形与圆形外切的 4 个顶点在竖直方向重合时为最稳定状态.则可知

$$L = 2 \times l = 2 \times \sqrt{h^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2}$$

利用问题 1 和问题 2 的思想得出对应的设计参数.

3 模型推广和优缺点

对以上圆形桌面折叠桌的建模分析,可以推广到一般标准桌面图形来设计折叠桌.假设桌面一般图形都是为正多边形,每个多边形都能做成圆的内切多边形,即回归到圆形桌面的情况下,也就可以以问题 1 和问题 2 建立的模型进行近似模型计算,设计出客户需求的折叠桌,这样可以设计更多新颖的桌面图形,尽可能满足客户的要求.

所建立模型简单易于推广,但是对于折叠桌的受力分析讨论较少,模型还有较大的改进空间,这些问题有待进一步解决.

参考文献:

- [1] 韩佳成.Robert Van Embricqs.平板折叠边桌[J].设计,2012(8):1-8
- [2] 张煜.折叠椅设计中的理性灵韵[J].装饰,2009(11):118-119
- [3] 吕林根,许子道.解析几何[M].4版.北京:高等教育出版社,2006
- [4] 黄廷祝.线性代数与空间解析几何[M].2版.北京:高等教育出版社,2003
- [5] 米尔斯切特(美).数学建模方法与分析[M].北京:机械工业出版社,2009
- [6] 杨启帆.数学建模[M].杭州:浙江大学出版社,2006
- [7] 张志勇.MATLAB 教程[M].北京:北京航空航天大学出版社,2010
- [8] 薛山.MATLAB 基础教程[M].北京:清华大学出版社,2011

The Optimal Design of the Folding Table

LI Xu¹, WANG Shi-peng², LIU Jia-bao³

(1.Department of Mathematics and Physics,Hefei University,Hefei 23060,China;

2.Hefei NO.7 Senior High School,Hefei 230088,China ;

3.Department of Public Courses,Anhui Xinhua University,Hefei 230088,China)

Abstract: Focusing on different shapes and sizes of the folding table,studying the dynamic changes with the downward movement of batten surrounding the table surface,this paper gets the model and corresponding processing parameters and then uses the Matlab software to simulate the dynamic changes of the folding table.

Key words: Matlab;folding table;optimal design;mathematics model