doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0011.001

退化分数阶不确定系统的鲁棒镇定*

方　园[1], 石丽娟[2], 马玉田[2]

(1.阜阳师范学院 经济学院,安徽 阜阳 236037; 2.阜阳师范学院 数学与统计学院,安徽 阜阳 236037)

摘　要:基于分数阶微分理论和 Lyapunov 函数的构建,对一类含不确定项的退化分数阶系统进行鲁棒镇定研究.首先利用“descriptor form”方法构造了一类新分数阶系统,然后利用状态反馈控制得到系统鲁棒镇定条件,最后结论以 LMI 方法给出,易于求解反馈增益矩阵.

关键词:退化;分数阶;鲁棒镇定;不确定

中图分类号:O231.1　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2015)11-0001-05

“分数阶微积分”这一概念自 1695 年被提出以来,引起了众多学者们的关注.不同学者就其定义给出了不同的表达形式,如 Grüwald-Letnikov 定义、Riemann-liouville 定义、Caputo 定义等[1].此后,分数阶微分系统的稳定性问题作为该理论发展的一个重要分支,逐渐成为了研究的一个热点问题.在针对分数阶微分系统研究中,有学者通过构造 Lyapunov 函数[2,3]并应用于 Mittag-Leffler 稳定[4,5]以及脉冲函数系统稳定[6],得到了十分有效的结果.有关整数阶不确定系统的鲁棒控制[7]研究理论发展已较为成熟,但涉及分数阶系统领域,理论还在逐渐完善中.过去整数阶系统稳定性条件常常利用线性矩阵不等式(LMI)形式给出,目前已经有报道利用 LMI 方法[8-11]得出分数阶微分系统鲁棒镇定性条件,但关于退化分数阶微分系统鲁棒控制研究鲜有报道.此处在前人研究基础上,利用“descriptor form”方法[12]讨论了含不确定项的退化分数阶系统的鲁棒镇定性问题.

1　预备知识及问题描述

这里先给出一些基本定义以及引理.

定义 1[2]　对于一元函数 $f(t)$,$\alpha(\alpha\in\mathbf{R}^+)$阶 Caputo 微分定义如下:

$$ {}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t_0}^{t_0}\frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\mathrm{d}\tau \tag{1}$$

其中,$t>t_0$,$n=\min\{k\in\mathbf{N}/k>\alpha\}$,$\alpha>0$,$C$ 表示 Caputo 型微分.

收稿日期:2015-04-08;**修回日期:**2015-06-12.

* **基金项目:**国家自然科学基金项目(11226140);安徽省教育厅自然科学一般项目(2014KJ001);阜阳师范学院自然科学研究重点项目(2014FSKJ03ZD);阜阳师范学院自然科学研究一般项目(2013FSKJ10);大学生创新创业项目(AH201410371079).

作者简介:方园(1984-),女,安徽滁州人,助教,硕士研究生,从事控制系统理论研究.

引理 1[2] 分数阶系统${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=f(x(t))$,其中 $\alpha\in(0,1)$,$x=0$ 为系统平衡点.

1) 若满足条件 $x(t)f(x(t))\leqslant 0$, $\forall x$ 时,则系统的零点是稳定的;

2) 若满足条件 $x(t)f(x(t))<0$, $\forall x\neq 0$ 时,则系统是渐近稳定的.

引理 2[7] 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{G}$ 为适当维数的矩阵,其中矩阵 $\boldsymbol{G}$ 满足 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{G}\leqslant\boldsymbol{I}$,则存在实数 $\varepsilon>0$,向量 x,y,成立 $2x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AGB}y\leqslant\varepsilon x^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}}x+\varepsilon^{-1}y^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}y$(其中 $\boldsymbol{I}$ 为单位阵).

为了得出主要结论,首先给出一个关于 Caputo 分数阶微分的引理如下:

引理 3 对于连续可微函数 $x(t)\in\mathbf{R}$,当 $t\geqslant t_0$ 时,

$$\frac{1}{2}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t),\ \forall\alpha\in(0,1) \tag{2}$$

证明 显而易见,不等式(2)等价于式(3)

$$x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)-\frac{1}{2}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t)\geqslant 0,\ \forall\alpha\in(0,1) \tag{3}$$

由定义 1 可知式(3)左边第二部分

$$\frac{1}{2}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t)=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{(x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}x(s))'}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}x'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s$$

则不等式(3)可进一步写为

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{(x^{\mathrm{T}}(t)-x^{\mathrm{T}}(s))\boldsymbol{P}x'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s\geqslant 0$$

对于式(3),可利用变量 $y(s)=x(t)-x(s)$,则有 $y'(s)=\dfrac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}=-\dfrac{\mathrm{d}x(s)}{\mathrm{d}s}$,此时式(3)可进一步写为

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y'(s)}{(t-s)^{\alpha}}\mathrm{d}s\leqslant 0 \tag{4}$$

利用分部积分法 $\int u\mathrm{d}v=uv-\int v\mathrm{d}u$,有 $u=\dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)}(t-s)^{-\alpha}$, $\mathrm{d}u=\dfrac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)}(t-s)^{-\alpha-1}\mathrm{d}s$, $v=\dfrac{1}{2}y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)$, $\mathrm{d}v=y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y'(s)\mathrm{d}s$,那么式(4)等价于

$$-\left[\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}(t-s)^{-\alpha}y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)\right]_{t_0}^{t}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\mathrm{d}s\geqslant 0$$

因此,

$$-\left.\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-s)^{\alpha}}\right|_{s=t}+\frac{y^{\mathrm{T}}(t_0)\boldsymbol{P}y(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\mathrm{d}s\geqslant 0 \tag{5}$$

其中,

$$\begin{aligned}\lim_{s\to t}\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-s)^{\alpha}}&=\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{s\to t}\frac{(x^{\mathrm{T}}(t)-x^{\mathrm{T}}(s))\boldsymbol{P}(x(t)-x(s))}{(t-s)^{\alpha}}=\\&\frac{1}{2\Gamma(1-\alpha)}\lim_{s\to t}\frac{x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(t)-2x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}x(s)+x^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}x(s)}{(t-s)^{\alpha}}\end{aligned} \tag{6}$$

利用 L' Hopital 法则,可知式(6)计算结果为 0.

此时,式(5)变成

$$\frac{y^{\mathrm{T}}(t_0)\boldsymbol{P}y(t_0)}{2\Gamma(1-\alpha)(t-t_0)^{\alpha}}+\frac{\alpha}{2\Gamma(1-\alpha)}\int_{t_0}^{t}\frac{y^{\mathrm{T}}(s)\boldsymbol{P}y(s)}{(t-s)^{\alpha+1}}\mathrm{d}s\geqslant 0$$

证毕.

注:若引理 3 中 $\boldsymbol{P}$ 满足条件 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$ 时,有 $\frac{1}{2}\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x^2(t)\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)$, $\forall\alpha\in(0,1)$. 此时与文献[2]中结论一致.

此处主要考虑退化分数阶不确定系统:

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}({}_{t_o}^{C}D_t^{\alpha}x(t))=(\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A}(t))x(t)+\boldsymbol{B}u(t)\\ x(0)=x_0\\ \Delta\boldsymbol{A}(t)=\boldsymbol{MF}(t)\boldsymbol{H}\\ \boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})\leqslant\boldsymbol{I}\end{cases}\tag{7}$$

其中,$0<\alpha<1$,矩阵对$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A})+\Delta\boldsymbol{A}(t)$满足正则条件,$\boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&0\end{pmatrix}$,$\Delta\boldsymbol{A}(t)$为适当维不确定矩阵,$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{H}$ 为适当维常数矩阵.

2　主要结论

利用文献[12]中“descriptor form”方法,可令${}_{t_o}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=y(t)$,并且取输入为 $u(t)=\boldsymbol{K}x(t)$,其中 $\boldsymbol{K}$ 为增益矩阵,此时系统(7)等价于系统(8)

$$\begin{cases}{}_{t_o}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=y(t)\\ 0=-\boldsymbol{E}y(t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{MF}(t)\boldsymbol{H}+\boldsymbol{BK})x(t)\end{cases}\tag{8}$$

对于分数阶不确定系统(8),有以下结论成立:

定理 1　若$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{A}+\Delta\boldsymbol{A})$正则,且存在正定矩阵 $\boldsymbol{P}$,常数 $\varepsilon_1,\varepsilon_2>0$,同时满足 $\boldsymbol{\Omega}<0$,则分数阶不确定系统(7)是渐近稳定的.

证明　对于分数阶系统(7),可以构造如下 Lyapunov 函数:

$$V(x(t))=\frac{1}{2}(x^{\mathrm{T}}(t),y^{\mathrm{T}}(t))\boldsymbol{EP}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\tag{9}$$

$\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&0\\\boldsymbol{P}_2&\boldsymbol{P}_3\end{pmatrix}>0$,并且 $\boldsymbol{P}_1>0$ 是正定矩阵.

$$V(x(t))=\frac{1}{2}(x^{\mathrm{T}}(t),y^{\mathrm{T}}(t))\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_1&0\\\boldsymbol{P}_2&\boldsymbol{P}_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1x(t)$$

利用引理 3,可得${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(x(t))\leqslant x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)$,其中,

$$x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1\,{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=(x^{\mathrm{T}}(t),y^{\mathrm{T}}(t))\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)\\0\end{pmatrix}=$$

$$(x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1,x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}+y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}})\begin{pmatrix}{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=y(t)\\0\end{pmatrix}\tag{10}$$

利用式(8)中第二个方程,式(10)可进一步写为

$$x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1{}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}x(t)=x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_1y(t)-x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}y(t)-y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}y(t)+ x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{MF}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{H})x(t)+y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}+\boldsymbol{MF}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{H})x(t) \tag{11}$$

因为 $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{t})\boldsymbol{F}(\boldsymbol{t})\leqslant\boldsymbol{I}$,再次利用引理 2,存在常数 $\varepsilon_1>0$,有

$$x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MF}(t)\boldsymbol{H}x(t)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_1x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2x(t)+\frac{1}{2}\varepsilon_1^{-1}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}x(t)$$

$$y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MF}(t)\boldsymbol{H}x(t)\leqslant\frac{1}{2}\varepsilon_2y^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3y(t)+\frac{1}{2}\varepsilon_2^{-1}x^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}x(t)$$

由文献[2]中推论 1,可知此时系统是渐近稳定的,当且仅当 $\boldsymbol{\Omega}<0$.

$${}_{t_0}^{C}D_t^{\alpha}V(x(t))\leqslant\xi^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}\,\xi,\xi=\mathrm{col}\{x(t),y(t)\},\boldsymbol{\Omega}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\Omega}_1 & \boldsymbol{\Omega}_2\\ * & \boldsymbol{\Omega}_3\end{pmatrix}$$

其中,

$$\boldsymbol{\Omega}_1=\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{BK}+\frac{1}{2}\varepsilon_1\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_2+\frac{1}{2}(\varepsilon_1^{-1}+\varepsilon_2^{-1})\boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_2=\frac{1}{2}(\boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}));\boldsymbol{\Omega}_3=-\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E}+\frac{1}{2}\varepsilon_2\boldsymbol{P}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}_3$$

定理 2 若存在正定矩阵 $\boldsymbol{X}$,实数 $a,b,\varepsilon_1>0,\varepsilon_2>0$,满足

$$\boldsymbol{\varXi}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\varXi}_1 & \boldsymbol{\varXi}_2 & \frac{\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{XH} & \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{M}\\ * & \boldsymbol{\varXi}_3 & 0 & 0\\ * & * & -(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\boldsymbol{I} & 0\\ * & * & 0 & -\frac{1}{\varepsilon_2}\boldsymbol{I}\end{pmatrix}<0$$

则退化分数阶不确定系统(7)是渐近稳定的.

其中,$\boldsymbol{\varXi}_1=a\boldsymbol{AX}+a\boldsymbol{BU}$;$\boldsymbol{\varXi}_2=\frac{1}{2}(ab\boldsymbol{X}-b\boldsymbol{EX}+a\boldsymbol{AX}+a\boldsymbol{BU})$;$\boldsymbol{\varXi}_3=-b\boldsymbol{EX}+\frac{1}{2}\varepsilon_2\boldsymbol{MM}^{\mathrm{T}}$.

证明 将 $\boldsymbol{\Omega}$ 两边同时乘以 $\mathrm{diag}\{\boldsymbol{P}_2^{-1},\boldsymbol{P}_3^{-1}\}$,并利用 Schur 补引理,可得 $\boldsymbol{\Omega}<0$,等价于 $\boldsymbol{\varXi}<0$.

3 结 论

针对 Caputo 退化分数阶不确定微分系统,基于状态反馈控制器的构造和“descriptor form”方法,通过构造 Lyapunov 函数得出了系统鲁棒镇定条件;最后利用 Schur 补引理,把系统鲁棒镇定条件转化为 LMI 形式,易于求解.系统中考虑含时滞情况是今后研究的一个方向.

参考文献:

[1] PODLUBNY I.Fractional Differential Equations[M].Academic Press,1999

[2] NORELYS A C,MANUEL A D M,GALLEGOS J A.Lyapunov Functions For Fractional Order Systems[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simulat,2014(22):1-7

[3] TRIGEASSOU J C ,MAAMRI N,SABATIER J,et al.A Lyapunov Approach to The Stability of Fractional Differential Equations [J].Signal Processing,2011(91):437-445

[4] LI Y, CHEN Y Q, PODLUBNY I. Stability of Fractional-order Nonlinear Dynamic Systems: Lyapunov Direct Method and Generalized Mittag-leffler Stability[J].Computers and Mathematics with Applications,2010(59):1810-1821

[5] LIU S,LI X Y,JIANG W,et al.Mittag-Leffler Stability of Nonlinear Fractional Neutral Singular Systems[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simualt,2012(17):3961-3966

[6] IVANKA S,GANI S.Stability Analysis of Impulsive Functional Systems of Fractional Order[J].Commun Nonlinear Sci Numer Simualt,2014(19):702-709

[7] XUE A.Theory and Application of Robust Optimal Control[M].Beijing:Science Press,2007

[8] XING S Y,LU J G.Robust Stability and Stabilization of Fractional-Order Linear Systems with Nonlinear Uncertain Parameters: An LMI Approach[J].Chaos,Solitons and Fractals,2009(42):1163-1169

[9] JIAO Z,ZHONG Y S.Robust Stability for Fractional-order Systems with Structured and Unstructured Uncertainties[J].Computers and Mathematics with Applications,2012(64): 3258-3266

[10] LAN Y H ,ZHOU Y .LMI-based Robust Control of Fractional-order Uncertain Linear System[J].Computers and Mathematics with Applications,2011(62):1460-1471

[11] FANG Y,JIANG W.Output Feedback Stabilization for a Type of Fractional-order Systems with Delay[J].Information and Control, 2013,42(1):33-38

[12] FRIDMAN E.New Lyapunov-krasovskii Functionals for Stability of Linear Retarded and Neutral Type Systems[J].Systems and Control Letters,2001(43):309-319

Robust Stabilization for Singular Fractional Systems with Uncertainties

FANG Yuan[1] ,SHI Li-juan[2] ,MA Yu-tian[2]

(1.School of Economics,Fuyang Teachers College,Anhui Fuyang 236037,China;

2.School of Mathematics and Statistics,Fuyang Teachers College,Anhui Fuyang 236037,China)

Abstract: Based on fractional differential theory and Lyapunov function, this paper researches robust stabilization for a class of singular fractional systems with uncertainties.This paper firslty constructs new fractional system by " descriptor form" method. Using state feedback control, the condition of robust stabilization is established,and the results given by LMI that are easy to resolve the gain matrix in the system.

Key words: singular;fractional order;robust stabilization;uncertainties