doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.018

正项级数比较判别法中“参照级数”的碎片化*

闻道君, 陈义安

(重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067)

摘　要:在 MOOC 模式下将无穷小量的阶与无穷级数比较判别法的极限形式结合起来,通过无穷级数通项对应的等价(或同阶)无穷小量、高阶无穷小量和低阶无穷小量来寻找适当的“参照级数”,解决了正项级数比较判别法的碎片化与知识系统性问题,并举例说明该方法在判定无穷级数收敛性方面的的有效性.

关键词:正项级数;比较判别法;无穷小量;p-级数;收敛;MOOC;知识碎片化

中图分类号:O173.1;G420　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0071-05

最近,MOOC(Massive Open Online Course,大规模公开在线课程,中文又称“慕课”)以一种引人瞩目的方式成为世界高等教育领域的热词和流行语,活跃于各大纸质媒体大学的版面上,刮起了一轮席卷全球的线上教育热潮.“MOOC”以世界一流大学最优质的教学资源为基础,以现代最先进的信息技术为支撑,以微视频、学习大数据、个性化学习等最新的教学理念为指导,以“短视频(一般 10 min 左右)+ 交互式练习(interactive exercises)”为基本教学单元的知识点/知识体组织模式和学习模式.这就要求将知识的颗粒度做到比较小,便于“碎片化”学习,也有利于学生记忆与理解.这些“碎片化”的基本教学元素构成了一个动态可控的有机体,使得各种优质的学习材料在在线学习过程中被及时调动起来,学生对学习进度具有一定的主动性和控制权.同时,MOOC 课程的学习者很可能是社会上的海量人群,不具有校内课堂教学秩序的节奏性、可控性和相对独立性.课程的教学体系的改革和知识“碎片化”方式也必须面对这一开放性的学习对象,研究课堂教学知识的“缺失”到“价值回归”,探寻将“专业知识”转化为面向学生“教学知识”的方法,以及如何将知识“碎片化”,并防止“碎片化”导致的学术严谨性不足,确保课程知识系统化教学目标的完成就显得举足轻重.

另一方面,高等数学是高等院校的公共基础课程,几乎涉及高等院校的所有学科和专业,无穷级数是高等数学中的重要组成部分.关于正项级数的敛散性的判别方法主要有比较判别法、比值判别法和根式判别法,其中应用最广泛的是比较判别法及其极限形式,这也是高等数学教学的重点和难点.运用正项级数比较判别法或其极限形式,最困难的是寻找一个适合的“参照级数”,并通过其已知的收敛性进一步判定原级数的收敛性[1-4].由于比较判别法中包含了两类失效的情形,即通项比收敛级数更大的和比发散级数更小的级数是无法判定其收敛性的,但是这并不意味着无穷级数的收敛性不能确定,很可能是因为选择了不适当的级数进行比较,所以“参照级数”的选择在无穷级数收敛性的判定中就显得至关重要了.根据多年的教学经验,通过引入等价无穷小量的方法寻找有效的“参照级数”,在一定程度上解决了比较判别法的碎片化与系统性问题.同时,当等价无穷小量的获得变得比较困难时,可进一步借助高阶无穷小量、低阶无穷小量和 p-级数、几何级数对无穷级数的收敛性进行判定,极大地简化了无穷级数的比较判别法极限形式的理解和应用.

收稿日期:2014-12-26;**修回日期**:2015-03-09.

* **基金项目**:重庆市高等学校教学改革研究项目(143059);重庆市教育科学规划课题(2014-GX-097);重庆工商大学教育教学改革研究项目(130224).

作者简介:闻道君(1975-),男,四川内江人,硕士,副教授,从事不动点理论与经济数学基础课程的教学研究.

1 预备知识

定义 1 设实数序列 $u_1,u_2,u_3,\cdots,u_n,\cdots$,称 $u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$ 为常数项无穷级数,简称级数,记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$,其中称 u_n 为通项或一般项.如果 $u_n\geqslant 0$,称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数;级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 n 项和 $S_n=u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n$,称为级数的部分和.

定义 2 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有极限,即 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$,则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,并称极限值 S 为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的和,即 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$;否则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

定义 3 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$(即无穷小量),且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,则当 $0<l<\infty$,称 u_n 和 v_n 为同阶无穷小量($l=1$ 称为等价无穷小量);当 $l=0$,称 u_n 为 v_n 的高阶无穷小量;当 $l=\infty$,称 u_n 为 v_n 的低阶无穷小量.

引理 1[1,2] (收敛的必要条件)设无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

引理 2[1,2] (比较判别法)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数,且满足 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\ldots)$,则

① 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

② 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散.

引理 3[1-3] (比较判别法的极限形式)设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为正项级数,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=l$,则

① 若 $0<l<+\infty$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性;

② 若 $l=0$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛;

③ 若 $l=+\infty$,且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.

2 教学难点及方法

由引理 1 可知,如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则其通项 u_n 一定为无穷小量(当 n 趋于无穷时),但这仅仅是级数收敛的必要条件.换言之,在 n 趋于无穷时,如果通项 u_n 不是无穷小量或者其极限不存在,则可以判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是发散的;反之,如果通项为无穷小量,级数仍然可能收敛也可能发散.如何选择适当的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$(简称“参照级数”)进一步判定正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性成了初学者无法回避的难点.另一方面,在无穷级数的前面添加或者删去有限项不会改变其收敛性,即无穷级数的敛散性与其前有限项无关,并且引理 2 中的条件 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\ldots)$ 无疑缩小了“参照级数”的寻找范围.因此,无穷级数比较判别法的极限形式由于去掉了上述条件 $u_n\leqslant v_n(n=1,2,\ldots)$ 而显得举足轻重.然而,教学中发现大多数初学者基本上只能勉强运用引理 3 的①,却苦于有效“参照级数”寻找,几乎不能理解引理 3 中的②和③.那么,能否将无穷小量的阶与无穷级数比较判别法的极限形式结合起来,通过收敛性已知的调和级数、几何级数、p-级数等选择有效的“参照级数”

呢？此处将通过无穷级数通项对应的等价无穷小量、高阶无穷小量和低阶无穷小量来寻找适当的“参照级数”,极大地简化了正项级数比较判别法的极限形式的理解和应用.

情形Ⅰ　利用等价(或同阶)无穷小量选择 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 或几何级数作为“参照级数”.引理 3①说明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$,且 $0<l<+\infty$,即通项 u_n 和 v_n 为同阶无穷小量,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性(级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的收敛性可通过“参照级数” $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 进行判定);另一方面,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n\neq0$(即 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}lv_n\neq0$),则由引理 1 直接判定原级数发散.众所周知,当 $p\leqslant1$ 时,p-级数发散;当 $p>1$ 时,p-级数收敛.如果能够通过级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项 u_n 找到与 p-级数通项等价(或同阶)的无穷小量,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性便与对应的 p-级数的敛散性相同.此外,由无穷小量和无穷大量的倒数关系可知,无穷小量的阶是由级数通项 u_n 中 n 的最高指数幂确定.例如,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$ 的通项与 $\frac{1}{n^2}$ 等价,故选 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为参照级数(收敛);级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{5n^2+3n+1}$ 的通项与 $\frac{1}{n}$ 同阶,故选调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 为参照级数(发散).

情形Ⅱ　利用高阶无穷小量并选 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为“参照级数”.由 p-级数的收敛性条件可知,调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是 p-级数收敛和发散的“临界点”,并且可近似认为非负的高阶无穷小量比低阶无穷小量更小(即以更快的速度收敛到零).引理 3②说明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$,即 u_n 为 v_n 的高阶无穷小量,由引理 2①可知,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.然而,寻找有效的高阶无穷小量比同阶无穷小量要困难许多,如果等价(或同阶)无穷小量不易获得,可直接选 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 作为“参照级数”.此时,如果存在常数 $p>1$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}n^pu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n^p}}=0$,即 u_n 为 $v_n=\frac{1}{n^p}$ 的高阶无穷小量,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

情形Ⅲ　利用低阶无穷小量并选 p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 为“参照级数”.类似地,引理 3③说明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}v_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=+\infty$,即 u_n 为 v_n 的低阶无穷小量,由引理 2②可知,若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.同理,如果有效的低阶无穷小量不易获得,可直接选调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 作为“参照级数”.此时,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=+\infty$,即 u_n 为 $v_n=\frac{1}{n}$ 的低阶无穷小量,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散.例如,设 $u_n=\frac{1}{n}\ln(n-1)$,由 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln(n-1)=0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}nu_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln(n-1)=+\infty$,即 u_n 为 $v_n=\frac{1}{n}$ 的低阶无穷小量,则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln(n-1)$ 发散.

同时,引理 3②,3③说明,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}v_n\neq0$,即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=l=0$,由于参照级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散,故不能判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.类似地,如果 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$ 且 $l=+\infty$,仍然不能判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性.然而,这两种失效的情形恰

恰是没有按通项的阶选择“参照级数”,即 u_n 是无穷小量却选择通项 v_n 不是无穷小量或无效的高阶无穷小量作为参照级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 导致比较判别法的极限形式失效,这恰好说明按无穷小量的阶选择“参照级数”的重要性.

3 应用举例

例 1 判定无穷级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}\ln\frac{n}{n-1}$ 的收敛性.

解 由于 $\ln\frac{n}{n-1}=\ln\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\sim\frac{1}{n-1}(n\to+\infty)$,故选 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2(n-1)}$ 作为第一参照级数,进一步按阶选取级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 为最终参照级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2}\ln\frac{n}{n-1}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n^2(n-1)}}{\frac{1}{n^3}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}=1$$

又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ 是收敛的 p-级数,由比较判别法的极限形式可知原级数收敛.

例 2 判定下列级数的收敛性:(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n-1}$.

解 (1) 由于 $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$,且级数通项分子 n 的最高指数幂为 $n+1$,分母 n 的最高指数幂为 $n+2$,故与通项同阶的无穷小量为 $\frac{n^{n+1}}{n^{n+2}}=\frac{1}{n}$,又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{n+2}}{(n+1)^{n+2}}=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

由引理 3①和调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 的发散性可知原级数发散(注:如果运用比值判别法或根式判别法,经验证不仅极限计算复杂,而且极限结果 $r=1$,即为这两类判别法均失效的情形).

(2) 记 $u_n=\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n-1}$,不难验证 $\lim_{n\to\infty}\ln\frac{n+1}{n-1}=0$,则 $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n-1}=0$,又因为 $\lim_{n\to\infty}n^p u_n=\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\ln\frac{n+1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}n^{p-1}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{p-1}}{n-1}=2\lim_{n\to\infty}\frac{n^{p-2}}{1-1/n}=2\lim_{n\to\infty}n^{p-2}=0(1<p<2)$. 即存在常数 $1<p<2$,使得 u_n 为 $v_n=\frac{1}{n^p}$ 的高阶无穷小量,则无穷级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n-1}$ 收敛(注:本题通项 $u_n=\frac{1}{n}\ln\frac{n+1}{n-1}\sim\frac{2}{n^2-n}(n\to\infty)$,可按阶选择 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 为参照级数进行判定).

例 3 判定级数 $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}+\cdots$ 的收敛性.

解 由于

$$\sqrt{2}=2\frac{1}{\sqrt{2}}=2\sin\frac{\pi}{4}=2\cos\frac{\pi}{4}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2\left(1-\cos\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\pi}{2^3}} = 2\sin\frac{\pi}{2^3}$$

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)}} = \sqrt{2-\sqrt{2\cdot 2\cos^2\frac{\pi}{2^3}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}} = 2\sin\frac{\pi}{2^4}$$

…

$$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

原级数可记为 $\sum_{n=1}^{\infty} 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$,$2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi}{2^n}(n\to\infty)$,故选 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 为参照级数,且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}} = 1$$

又因为几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 收敛,由引理 3①可知原级数收敛.

参考文献:

[1] 龚德恩,范培华.微积分[M].北京:高等教育出版社,2008

[2] 陈修素,陈义安,雷澜,等.微积分(下册)[M].北京:高等教育出版社,2011

[3] 陈文灯,袁一圃,俞元洪.高等数学复习指导[M].北京:北京理工大学出版社,1992

[4] 陈传璋,金福临,朱学炎,等.数学分析[M].2 版.北京:高等教育出版社,1995

[5] 闻道君,龚黔芬.Simpson 不等式的改进及其应用[J].数学的实践与认识,2010,40(21):159-162

[6] 闻道君,陈义安,唐艳.高等院校经管类专业的数学教学方法研究[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(4):413-416

[7] 李红婷.高师“数学教学论”课程建设的反思与重构[J].西南师范大学学报:自然科学版,2010,35(6):196-200

[8] 江蓉,王守中.矩阵的秩在线性代数中的应用及其教学方法的探讨[J].西南师范大学学报:自然科学版,2012,37(8):175-180

[9] 闻道君,唐艳,陈义安.支架式教学:一个重要极限的抽象方法究[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(10):78-80

Fragmentization of “Reference Series” of Comparing Discriminant Methods for a Positive Term Series

WEN Dao-jun, XIA Li, CHEN Yi-an

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: This paper combines the order of infinitesimality with the limiting form of comparing discriminant methods for a positive term series under the model of MOOC. A proper “reference series” is found by equivalent(or same order) infinitesimality with original series, or high-order or low-order infinitesimality respectively which general term corresponds to. The problem of fragmentization and knowledge systematicness of the comparing discriminant methods for a positive term series is solved. Moreovr, the effectivity of this method is illustrated by some instances in discriminating the convergence of infinite series.

Key words: positive term series; comparing discriminant methods; infinitesimality; p-series; convergence; MOOC; knowledge fragmentization