第 32 卷第 9 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 9 月
Vol. 32 NO.9 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Sep.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.017

# 一类特殊图的顶点染色及其猜想的证明

张 祥 波

(临盘中学,山东 临邑 251507)

**摘 要**:通过研究一类特殊图的顶点染色,得到了以下结果:给出了 $|S|=p-3$ 且 $p\in\{4,5,6\}$ ,图 $G$ 的顶点染色数;证明了 $|S|>\dfrac{p}{2}$ 且 $|S|=p-3$ 的图 $G$ 不存在第 $p-m$ 类图,$m\geqslant 7$ 且 $m$ 是正整数;证明了 $|S|=p-3$ 时,$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$;进一步证明了猜想 $\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$ 是正确的;为今后研究该猜想和图的顶点染色提供一些思想方法.

**关键词**:顶点染色;最大团;第 $k$ 类图;图的厚度

**中图分类号**:O157.5 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)09-0066-05

## 1 基础知识

文中有关的概念和符号参见文献[1,2].$V(G)$,$E(G)$,$\theta(G)$,$\chi(G)$ 分别是图 $G$ 的顶点集、边集、厚度、顶点染色数.设 $S$ 是图 $G$ 的一个团,由于图 $G$ 必有最大团,用 $|S|$ 表示图 $G$ 最大团的顶点数.如果图 $G$ 含有的所有最大团存在公共顶点,且公共顶点的个数为 $k$,则称此图为第 $k$ 类图[1].图 $G$ 含有的所有最大团 $K_{|S|}$ 的公共顶点及它们在图 $G$ 中的边构成的子图,记作图 $G_s(V',E')$,简称图 $G_s$.$V'(G_s)$ 是图 $G$ 含有的所有最大团 $K_{|S|}$ 的公共顶点集.$G-V'$ 表示从 $G$ 中删去 $V'(G_s)$ 的所有顶点及其与 $V'(G_s)$ 中顶点关联的一切边后得到的图.

一般图的顶点染色是非常复杂的,目前较多地是研究特殊图的顶点染色[3-7].为研究一般图的顶点染色,文献[8]提出了图的色数与厚度的猜想:$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.文献[9]定理 3—5 分别证明了完全图、$|S|=p-1$ 和 $|S|=p-2$ 时,猜想是成立的;文末提出了有待研究的 2 个问题:

**问题 1**[9] $|S|=p-3$ 时,$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$ 是否成立?

**问题 2**[9] 若 $|S|=p-3$,则 $\chi(G)=p-3$ 或 $p-2$,那么满足什么条件的图,$\chi(G)=p-3$;满足什么条件的图,$\chi(G)=p-2$.

文献[1]通过研究问题 2,提出了研究图的顶点染色的一种新方法,并利用该方法得到了该问题在 $|S|>\dfrac{p}{2}$ 且 $|S|=p-3$ 时,图的 4 种顶点染色.

**收稿日期**:2015-01-23;**修回日期**:2015-03-11.

**作者简介**:张祥波(1978-),山东临邑人,中教一级,从事图的染色研究.

**引理 1**[1]　$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$的图$G$，若图$G_s$中存在一个顶点与图$G-V'$的顶点中至少一个不相邻，则$\chi(G)=p-3$.

**引理 2**[1]　$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$的图$G$，若只含有一个最大团$K_{p-3}$，则$\chi(G)=p-3$.

**引理 3**[1]　如果$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$的图$G$满足下列条件：

1）$V'(G_s)$中任意一个顶点与$V(G-V')$中的所有顶点相邻；

2）图$G$是第$p-4$类图或第$p-6$类图.

则$\chi(G)=p-3$.

**引理 4**[1]　$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$图$G$满足下列条件：

1）$V'(G_s)$中任意一个顶点与$V(G-V')$中的所有顶点相邻；

2）图$G$是第$p-5$类图.

若图$G-V'$中不存在奇圈，则$\chi(G)=p-3$；若图$G-V'$中存在奇圈，则$\chi(G)=p-2$.

但问题 2 尚未完全解决，文献[1]在文末将其未解决的部分总结为第 5 个问题.此处的研究是给出$|S|=p-3$且$p\in\{4,5,6\}$，图的各种顶点染色；证明$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$时，图$G$不存在第$p-m$类图，$m\geqslant 7$且$m$是正整数.进一步证明文献[9]提出的问题 1 是成立的.综合上述 4 个引理，从而完全解决文献[9]提出的第 2 个问题.

## 2　$|S|=p-3$ 且 $p\in\{4,5,6\}$ 时图的顶点染色

$|S|=p-3$且$p\in\{4,5\}$的图$G$，容易得到以下结论成立：

① $p=4$时，$|S|=1$，则$\chi(G)=1$；

② $p=5$时，图$G$含最大团$K_2$，若不存在奇圈，则$\chi(G)=2$；若存在奇圈，则$\chi(G)=3$.

**证明**　图$G$若存在奇圈，由于含最大团$K_2$，所以奇圈必是 5-圈，于是$\chi(G)=3$.

其次考虑图$G$不存在奇圈的情况，若所有最大团$K_2$有公共顶点，则只有一个公共顶点，于是必有$\chi(G)=2$；若所有最大团$K_2$不存在公共顶点，由文献[1]定理 4 的证明可知$\chi(G)=2$.

**引理 5**[9]　若$|S|=p-2$，则$\chi(G)=p-2$.

**定理 1**　$p=6$且$|S|=3$，图$G$所有最大团$K_3$存在一个公共顶点：

① 若该公共顶点与图$G-V'$中的一个顶点不相邻，则$\chi(G)=3$；

② 若该公共顶点与图$G-V'$中的所有顶点相邻，且图$G-V'$存在奇圈，则$\chi(G)=4$；

③ 若该公共顶点与图$G-V'$中的所有顶点相邻，且图$G-V'$不存在奇圈，则$\chi(G)=3$.

**证明**　先证①，设$u$是图$G$所有最大团$K_3$的公共顶点，$v$是图$G-V'$的一个顶点，$u$和$v$不相邻，将$u$和$v$删掉，必得到一个顶点数是 4，含最大团$K_2$的图$G_1$.由引理 5 知，$\chi(G_1)=2$，添上顶点$u$和$v$，则图$G$的色数增加 1，故$\chi(G)=3$.

关于②,设 $u$ 是所有最大团 $K_3$ 的公共顶点,则 $G-V'$ 是一个顶点数是 5,含最大团 $K_2$ 的图.由于图 $G-V'$ 存在奇圈,则必是一个 5-圈,所以 $\chi(G-V')=3$,由于 $u$ 与图 $G-V'$ 的所有顶点相邻,故 $\chi(G)=4$.

关于③,由条件知,图 $G-V'$ 是一个顶点数是 5,含最大团 $K_2$ 的图.由于图 $G-V'$ 不存在奇圈,所以由文献[1]定理 4 的证明可知,$\chi(G)=3$.

**定理 2** $p=6$ 且 $|S|=3$,图 $G$ 所有最大团 $K_3$ 存在 2 个公共顶点,则 $\chi(G)=3$.

**证明** 分两种情况.

**情况 1** 有一个公共顶点与图 $G-V'$ 中的一个顶点不相邻.设 $u$ 是图 $G$ 所有最大团 $K_3$ 的公共顶点,$v$ 是图 $G-V'$ 的一个顶点,$u$ 和 $v$ 不相邻,将 $u$ 和 $v$ 删掉,必得到一个顶点数是 4,含最大团 $K_2$ 的图 $G_1$.由引理 5 知,$\chi(G_1)=2$,添上顶点 $u$ 和 $v$,则图 $G$ 的色数增加 1,故 $\chi(G)=3$.

**情况 2** 2 个公共顶点与图 $G-V'$ 的所有顶点相邻,则图 $G-V'$ 中所有顶点互不相邻,于是 $\chi(G-V')=1$,故 $\chi(G)=3$.

**定理 3** $p=6$ 且 $|S|=3$,图 $G$ 所有最大团 $K_3$ 不存在公共顶点,则 $\chi(G)=3$.

由文献[1]定理 3 的证明可知该定理成立,此处证明略.

## 3 关于第 $p-m$ 类图

**引理 6**[9] 若 $|S|>\frac{p}{2}$,则图 $G$ 含有的所有最大团 $K_{|S|}$ 必存在公共顶点.

**定理 4** $|S|>\frac{p}{2}$ 且 $|S|=p-3$ 的图 $G$ 不存在第 $p-m$ 类图,$m\geqslant 7$ 且 $m$ 是正整数.

**证明** 使用反证法证明.

假设图 $G$ 是第 $p-m$ 类图,则图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$ 有 $p-m$ 个公共顶点.考虑其中一个最大团 $S_1$,则必有 3 个顶点不是 $S_1$ 的顶点.不妨设这 3 个顶点分别是 $u_1,u_2,u_3$,于是 $u_1,u_2,u_3$ 中至少有一个顶点在除 $S_1$ 外的最大团 $K_{p-3}$ 中.考虑 3 种情况:

**情况 1** 若 $u_1,u_2,u_3$ 都是最大团 $K_{p-3}$(除 $S_1$ 外)的顶点,则图 $G_s$ 与图 $G-V'$ 所有顶点相邻.于是将图 $G_s$ 的所有顶点都删去,必得到一个顶点数是 $m$,含有最大团的顶点数是 $m-3$ 的图 $G_1$.由于 $m\geqslant 7$,故 $m-3>\frac{m}{2}$.由引理 6 知,图 $G_1$ 中所有最大团 $K_{m-3}$ 必有公共顶点.从而图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$ 的公共顶点数大于 $p-m$,这与图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$ 有 $p-m$ 个公共顶点矛盾.

**情况 2** $u_1,u_2,u_3$ 中只有一个顶点是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点.不妨设 $u_1$ 是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点,则 $u_2$ 和 $u_3$ 不是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点.于是将图 $G_s$ 及 $u_2,u_3$ 都删掉,必得到顶点数是 $m-2$,含最大团 $K_{m-3}$ 的图 $G'$.由于 $m\geqslant 7$,故 $m-3>\frac{m-2}{2}$.由引理 6 知,图 $G'$ 中所有最大团 $K_{m-3}$ 必有公共顶点.从而图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$ 的公共顶点数大于 $p-m$,这与图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$ 有 $p-m$ 个公共顶点矛盾.

**情况 3** $u_1,u_2,u_3$ 中只有 2 个顶点是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点.不妨设 $u_1$ 和 $u_2$ 是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点,则 $u_3$ 不是最大团 $K_{p-3}$ 的顶点.将图 $G_s$ 和 $u_3$ 都删掉,必得到一个顶点数是 $m-1$,含最大团 $K_{m-3}$ 的图 $G_2$.由于 $m\geqslant 7$,故

$m-3>\frac{m-1}{2}$.由引理 6 知,图 $G_2$ 中所有最大团 $K_{m-3}$必有公共顶点.从而图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$的公共顶点数大于 $p-m$,这与图 $G$ 中所有最大团 $K_{p-3}$有 $p-m$ 个公共顶点矛盾.

综合以上 3 种情况,假设不成立,定理得证.

**推论 1**　$|S|>\frac{p}{2}$且$|S|=p-3$ 的图 $G$,有且仅有以下几类图:第 $p-6$ 类图,第 $p-5$ 类图,第 $p-4$ 类图及只含有一个最大团 $K_{p-3}$的图.

## 4　$|S|=p-3$ 时问题 1 的证明

**引理 7**[9]　若$|S|=p-3$,则$\chi(G)\leqslant p-2$.

**引理 8**[10]　$\theta(K_n)=\left[\frac{n+7}{6}\right]$,$n\neq 9,10$,$\theta(K_9)=\theta(K_{10})=3$,其中 $K_n$ 是完全图.

**定理 5**　$|S|=p-3$ 时,$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

**证明**　由前面的结论易知,$p=4$ 时,$\chi(G)=1$;$p=5$ 时,$\chi(G)=2$ 或 3;$p=6$ 时,由定理 1,定理 2,定理 3,定理 4 知,$\chi(G)=3$ 或 4,而 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant 4$.故$|S|=p-3$ 且 $p\in\{4,5,6\}$ 时,$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

现证 $p\geqslant 7$ 的情况.由引理 7 知,$|S|=p-3$ 时,$\chi(G)\leqslant p-2$.对 $p$ 分 6 种情况,$p\in\{6k,6k-1,6k-2,6k-3,6k-4,6k-5\}$,$k$ 是正整数且 $k\geqslant 2$.由引理 8 知,$|S|=p-3$ 且$|S|\neq 9,10$ 时,$\theta(G)\geqslant\left[\frac{p+4}{6}\right]$;$|S|=9$ 或 10 时,$\theta(G)\geqslant 3$.

① $p=6k$,则$\chi(G)\leqslant 6k-2$,$|S|=6k-3$.若 $k\geqslant 3$,于是 $\theta(G)\geqslant k$,故 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant 4k+k^2-1$,而 $4k+k^2-1-(6k-2)=(k-1)^2$,但$(k-1)^2\geqslant 0$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$;若 $k=2$,则 $p=12$,$|S|=9$,于是 $\theta(G)\geqslant 3$,$\chi(G)\leqslant 10$,而 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant 20$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

② $p=6k-1,6k-2,6k-3,6k-4$ 时,同理可证,均有$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

③ $p=6k-5$,则$\chi(G)\leqslant 6k-7$,$|S|=6k-8$.若 $k=3$,则$|S|=10$,于是 $\theta(G)\geqslant 3$,$\chi(G)\leqslant 11$,而 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant 20$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$;若 $k\neq 3$,于是 $\theta(G)\geqslant k-1$,而 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant k^2+2k-4$,于是 $k^2+2k-4-(6k-7)=k^2-4k+3=(k-3)(k-1)$;$k\geqslant 3$ 时,显然有$(k-3)(k-1)\geqslant 0$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$;$k=2$ 时,则 $p=7$,$|S|=4$,此时图 $G$ 是一个顶点数是 7,含最大团 $K_4$ 的图.由推论 1 知,这种图只有 4 种情况,分别是引理 1,引理 2,引理 3,引理 4.由引理 1,引理 2,引理 3 知,这 3 类图的顶点染色数$\chi(G)=4$,而 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1\geqslant 4$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.如果图 $G$ 满足引理 4,即图 $G$ 是第 2 类图,且 $V'(G_s)$中任意一个顶点与 $V(G-V')$中的所有顶点相邻.由引理 4 知,若图 $G-V'$中不存在奇圈,则$\chi(G)=4$,显然有$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.若图 $G-V'$中存在奇圈,则$\chi(G)=5$,由引理 4 的证明知,图 $G-V'$是一个顶点数是 5,且含最大团 $K_2$ 和 5-圈的图.考虑图 $G$ 是第 2 类图,因此图 $G$ 中有 2 个相邻的顶点都与图 $G-V'$的所有顶点相邻,所以易证图 $G$ 的厚度 $\theta(G)=2$.于是 $4\theta(G)+\theta^2(G)-1=11$,故$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

综上各种情况得证,$|S|=p-3$ 时,有$\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$.

## 5 结束语

在文献[1]的基础上,解决了文献[1]在文末提出的第 5 个问题,结合文献[1]已经得到的 4 个定理,从而完全解决了文献[9]提出的问题 2.这为研究 $|S|=p-4$ 时,图的顶点染色,提供了一些思想和方法.文末利用这些结论,证明了文献[9]提出的问题 1 是正确的.因此,有理由猜测 $|S|=p-4$ 时,该猜想是否成立.至此,文献[9]提出的 2 个问题已全部解决;同时文献[1]提出的 5 个有待研究的问题中,还有 3 个尚待研究.另外注意到证明的定理 4,由此猜想 $|S|>\frac{p}{2}$ 且 $|S|=p-m$ 的图 $G$,是否存在第 $p-q$ 类图,$q\geqslant 2m+1$,$m\geqslant 3$ 且 $m$ 是正整数.此外定理 4 证明了 $m=3$ 的情况是不存在的,对于 $m\geqslant 4$ 的情况还有待研究.

**参考文献:**

[1] 张祥波. 一类特殊图的顶点染色数[J]. 安庆师范学院学报:自然科学版, 2015,21(3):130-135

[2] 谢政,戴丽.组合图论[M].长沙:国防科技大学出版社,2003

[3] 刘广德, 双外平面图的点染色[J]. 枣庄学院学报,2013,30(5):63-65

[4] 亢莹利,王应前.平面图 3 色可染的一个充分条件[J].中国科学: 数学,2013,43(4):409-421

[5] 彩春丽,谢德政.平面图 3-可着色的 3 个充分条件[J].河南师范大学学报:自然科学版, 2011,39(6):4-6;28

[6] 刘配配,王应前.不含 4-圈与 7-圈的平面图是(2,0,0)-可染的[J].中国科学: 数学, 2014,44(11):1153-1164

[7] 胡凤凤,刘家保.关于一类图的邻点可区别全染色[J].重庆工商大学学报:自然科学版, 2015,32(2):23-26

[8] 张祥波. 研究四色问题的意义及理论构想[J].数学理论与应用,2012,32(3):24-28

[9] 张祥波,魏志芹.关于图的色数与厚度的一些新结果[J].高师理科学刊,2013,33(5):35-37

[10] 卜月华.图论及其应用[M].南京:东南大学出版社,2002

# Proof of a Conjecture of A Class of Vertex Coloring of Special Graphs

**ZHANG Xiang-bo**

(Linpan Middle School, Linyi 251507, China)

**Abstract**: Throughout the study on a class of vertex coloring of special graphs, this paper gives the following results:

(1) Give vertex coloring number of graph G, $|S|=p-3$and $p\in\{4,5,6\}$ .

(2) Prove that graph G of $|S|>\frac{p}{2}$ and $|S|=p-3$has no the $p-m$ class of graph, $m\geqslant 7$and m is positive integer.

(3) Prove that $\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$, when $|S|=p-3$.

All kinds of vertex coloring number of graph G when $|S|=p-3$are given from these results above, and further it is proven that the conjecture $\chi(G)\leqslant 4\theta(G)+\theta^2(G)-1$ is right., which provide some thoughts and methods for further study on this conjecture and the graph vertex coloring.

**Key words**: vertex coloring, the maximum clique, thekclass of graph, thickness of a graph