第 32 卷第 9 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 9 月
Vol. 32　NO.9　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　Sep.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.016

一类具偏差变元二阶微分方程周期解的存在性*

邓瑞娟
(芜湖职业技术学院,安徽 芜湖 241000)

摘　要:主要利用 Mawhin 延拓定理研究一类二阶具偏差变元微分方程 $x''(t)+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))=p(t)$ 的周期解问题,得到了存在周期解的两个充分条件.

关键词:Mawhin 延拓定理;偏差变元;周期解
中图分类号:O175.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0061-05

1　基础知识

近年来,具偏差变元的微分方程由于其在控制论、生物学等很多领域有重要应用,一直受到人们的广泛关注,也已经有了一定的成果[1-9].此处主要是运用重合度理论的 Mawhin 延拓定理研究如下具偏差变元二阶微分方程的周期解:

$$x''(t)+f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))=p(t) \tag{1}$$

其中,$f(t,x,y,v)$是 $\mathbf{R}^4$ 上的连续函数,同时还是以 T 为周期的函数.而 $g(x)$,$\beta(t)$,$p(t)$,$\tau_0(t)$和 $\tau_1(t)$均为 $\mathbf{R}$ 上的连续函数,其中 $\beta(t)$,$p(t)$,$\tau_0(t)$和 $\tau_1(t)$都是以 T 为周期的函数.

引入以下记号:$T>0$ 为常数,$C_T^1=\{x\mid x\in C^1(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+T)=x(t),\forall t\in\mathbf{R}\}$,其范数为 $\|x\|=\max\{\|x\|_\infty,\|x'\|_\infty\}$.类似地,令 $C_T=\{x\mid x\in C(\mathbf{R},\mathbf{R}),x(t+T)=x(t),\forall t\in\mathbf{R}\}$,其范数为 $\|x\|_\infty=\max\limits_{t\in[0,T]}|x(t)|$.则 C_T^1,C_T 均为 Banach 空间.

在 C_T^1 上定义线性算子 $L:D(L)\subset C_T^1\to C_T$ 为

$$Lx=x'',D(L)=\{x\mid x\in C_T^1,x''\in C(\mathbf{R},\mathbf{R})\}$$

于是

$$\mathrm{Ker}\,L=R,\mathrm{lm}\,L=\left\{x\mid x\in C_T,\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t=0\right\}$$

显然,L 是指标为零的 Fredholm 算子.假定 P,Q 为投影算子

$$P:C_T^1\to\mathrm{Ker}\,L,[Px](t)=x(0)=x(T)$$

$$Q:C_T\to C_T,[Qx](t)=\frac{1}{T}\int_0^T x(s)\,\mathrm{d}s$$

则 $\mathrm{lm}\,P=\mathrm{Ker}\,L$,$\mathrm{Ker}\,Q=\mathrm{lm}\,L$.令 $L_P=L|_{D(L)\cap\mathrm{Ker}\,P}$,则 L_P 是可逆的,其逆为

$$L_P^{-1}:\mathrm{Im}\,L\to D(L)$$

$$[L_P^{-1}y](t)=-\frac{t}{T}\int_0^T(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s+\int_0^t(t-s)y(s)\,\mathrm{d}s$$

收稿日期:2015-01-15;**修回日期**:2015-02-20.
* **基金项目**:安徽省 2013 年度省级自然科学研究项目(KJ2013B347);安徽省 2013 年度省级自然科学研究项目(KJ2013B348).
作者简介:邓瑞娟(1984-),女,安徽芜湖人,讲师,硕士,从事微分方程研究.

下面给出将会使用到的引理.

引理 1[4]**(Mawhin 延拓定理)** 设 X,Y 为 Banach 空间, $L:D(L)\subset X\to Y$ 是指标为零的 Fredholm 算子, $\Omega\subset X$ 为有界开集, $N:\overline{\Omega}\to Y$ 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的,如果下列条件满足:

① 对 $\forall\lambda\in(0,1)$, $x\in\partial\Omega\cap D(L)$, 有 $Lx\neq\lambda Nx$;

② $\forall x\in\partial\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L$, $QNx\neq 0$;

③ $\deg(JQN,\Omega\cap\mathrm{Ker}\ L,0)\neq 0$.

则方程 $Lx=Nx$ 在 $\overline{\Omega}\cap D(L)$ 上至少存在一个解.

2 主要结果

定理 1 设方程(1)满足条件:

① $\forall(t,x,y,v)\in\mathbf{R}^4$, 有 $|f(t,x,y,v)|\geqslant\sigma|v|$, 其中 $\sigma=\inf_{(t,x,y,v)\in[0,T]\times R^3}f(t,x,y,v)>0$, $\gamma=\sup_{(t,x,y)}\in[0,T]\times\mathbf{R}^2 f(t,x,y,0)$;

② $\beta_1=\max\limits_{t\in[0,T]}\beta(t)\geqslant\beta_0=\min\limits_{t\in[0,T]}\beta(t)>0$;

③ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sup\left|\dfrac{g(x)}{x}\right|\leqslant r$;

④ $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\mathrm{sgn}(x)g(x)=+\infty$. 则当 $r<\dfrac{\sigma}{\beta_1 T}$ 时,方程(1)存在 T-周期解.

证明 令 $N:C_T^1\to C_T$, $[Nx](t)=-f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))-\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))+p(t)$, 则方程(1)可化为算子方程 $Lx=Nx$. 记 $\Omega_1=\{x\mid x\in D(L),Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1)\}$, 则对 $\forall x\in\Omega_1$, 有

$$x''(t)+\lambda f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\lambda\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))=\lambda p(t) \tag{2}$$

下面证明存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得

$$|x(\xi)|\leqslant K_1^* \tag{3}$$

其中 K_1^* 为与 λ 无关的常数. 事实上, 令 t_1 为 $x(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上取得最大值的点, 则 $x'(t_1)=0$, $x''(t_1)\leqslant 0$. 由于 $p(t)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的连续周期函数, 因此必然存在最小值, 记 $p=\min\limits_{t\in[0,T]}p(t)$, 由方程(2)得

$$f(t_1,x(t_1),x(t_1-\tau(t_1)),0)+\beta(t_1)g(x(t_1-\tau_1(t_1))-p(t_1)\geqslant 0 \tag{4}$$

于是有

$$g(x(t_1-\tau(t_1)))\geqslant\frac{p-\gamma}{\beta_1}$$

由定理 1 条件④知, $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$, 因此必存在 $K_1>0$, 使得

$$x(t_1-\tau_1(t_1))>-K_1 \tag{5}$$

令 t_2 为 $x(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上取得最小值的点, 则 $x'(t_2)=0$, $x''(t_2)\geqslant 0$, 由式(2)得

$$\beta(t_2)g(x(t_2-\tau_1(t_2))-p(t_2)\leqslant 0 \tag{6}$$

下面讨论:

(Ⅰ) 若 $t_2=t_1$, 则 $x(t)\equiv C$, 且 $|g(C)|\leqslant\left|\dfrac{p(t_2)}{\beta(t_2)}\right|\leqslant\dfrac{\|p\|_\infty}{\beta_0}$, 则存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得 $|x(\xi)|\leqslant K_1^*$.

(Ⅱ) 若 $t_2\neq t_1$, 由式(6), $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-\infty$ 知存在常数 $K_2>0$, 有 $x(t_2-\tau_1(t_2))<K_2$.

(A) 若 $x(t_2-\tau_1(t_2))\in(-K_1,K_2)$, 则取 $\xi=t_2-\tau_1(t_2)$, 此时有 $|x(\xi)|\leqslant K_1^*=\max\{K_1,K_2\}$.

(B) 若 $x(t_2-\tau_1(t_2))<-K_1$, 由式(5)及 $x(t)$ 的连续性及介值定理知一定存在 $t_1-\tau_1(t_1)$, $t_2-\tau_1(t_2)$ 之间的某个 ξ, 使得 $x(\xi)=-K_1$, 即 $|x(\xi)|\leqslant K_1^*$.

综上所述, 存在 $\xi\in\mathbf{R}$, 使得 $|x(\xi)|\leqslant K_1^*$, 其中 K_1^* 是与 λ 无关的常数, 记 $\xi=kT+t_0$, 其中 $k\in\mathbf{Z}$, $t_0\in[0,T]$, 则 $|x(\xi)|=|x(t_0)|\leqslant K_1^*$. 于是,

$$x(t)=x(t_0)+\int_{t0}^{t}x'(s)\mathrm{d}s$$

因此

$$\|x\|_\infty\leqslant K_1^*+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t$$

由于 $x(0)=x(T)$,故必有 $t_0^*\in[0,T]$,使得 $x'(t_0^*)=0$,同上可得

$$x'(t)=x'(t_0^*)+\int_{t0}^{t^*}x''(s)\mathrm{d}s$$

于是

$$\|x'\|_\infty\leqslant\int_0^T|x''(t)|\mathrm{d}t$$

将式(2)两端同乘以 $x'(t)$,并在$[0,T]$上积分,得

$$\int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))x'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))x'(t)\mathrm{d}t=\int_0^T p(t)x'(t)\mathrm{d}t \tag{7}$$

由定理 1 的条件①可得

$$\sigma\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant-\int_0^T\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))x'(t)\mathrm{d}t+\int_0^T p(t)x'(t)\mathrm{d}t$$

对于 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left(\frac{\sigma}{\beta_1T}-r\right)$,由定理 1 条件③可知存在 M_1,当 $|x(t-\tau_1(t))|\geqslant M_1$ 时,有

$$|g(x(t-\tau_1(t)))|\leqslant(r+\varepsilon)|x(t-\tau_1(t))| \tag{8}$$

设 $E_1=\{t|t\in[0,T],|x(t-\tau_1(t))|\geqslant M_1\}$,$E_2=\{t|t\in[0,T],|x(t-\tau_1(t))|<M_1\}=[0,T]\backslash E_1$,并记

$$\rho=\max_{|x|<M_1}|g(x)| \tag{9}$$

则由式(9)-(11)和柯西不等式可得

$$\begin{aligned}\sigma\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant\int_0^T|\beta(t)||g(x(t-\tau_1(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t+\int_0^T|p(t)||x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\ \beta_1\int_{E_1}|g(x(t-\tau_1(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t+\beta_1\int_{E_2}|g(x(t-\tau_1(t)))||x'(t)|\mathrm{d}t+\|p\|_\infty\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\ \beta_1(r+\varepsilon)\|x\|_\infty\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+C_0\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant\\ \beta_1(r+\varepsilon)\left(K_1^*+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\right)\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+C_0\int_0^T|x'(t)|dt\leqslant\\ (\beta_1(r+\varepsilon)K_1^*+C_0)\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t+\beta_1(r+\varepsilon)\left(\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\right)^2\leqslant\\ (\beta_1(r+\varepsilon)K_1^*+C_0)T^{1/2}\left(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}+\beta_1(r+\varepsilon)T\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{10}$$

式(10)中,$C_0=\beta_1\rho+\|p\|_\infty$,因此

$$(\sigma-\beta_1(r+\varepsilon)T)\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant(\beta_1(r+\varepsilon)K_1^*+C_0)T^{1/2}\left(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}$$

$$\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\leqslant T\left[\frac{\beta_1(r+\varepsilon)K_1^*+C_0}{\sigma-\beta_1(r+\varepsilon)T}\right]^2=\frac{1}{T}\left[\frac{rT\beta_1K_1^*+\sigma K_1^*+2TC_0}{\sigma-r\beta_1T}\right]^2$$

由此可得

$$\begin{aligned}\|x\|_\infty\leqslant K_1^*+\int_0^T|x'(t)|\mathrm{d}t\leqslant K_1^*+T^{1/2}\left(\int_0^T|x'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}=\\ K_1^*+\frac{rT\beta_1K_1^*+\sigma K_1^*+2TC_0}{\sigma-r\beta_1T}\end{aligned}$$

由此可知,一定存在某个与 λ 无关的 $M>0$,使得$\|x\|_\infty\leqslant M$,$\|x'\|_\infty\leqslant M$,故 Ω_1 为有界集.

设 $\Omega_2=\{x|x\in\mathrm{Ker}\,L\cap C_T^1,N(x)\in\mathrm{lm}\,L\}$,任取 $x(t)\in\Omega_2$,则知 $x(t)\equiv C$ 必满足

$$\int_0^T f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),0)\mathrm{d}t+\int_0^T\beta(t)g(C)\mathrm{d}t-\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$$

故 Ω_2 也是有界的. 取 $\Omega=\{x \mid x\in C_T^1, \|x\|<2M+1\}$, 则 $\Omega\supset\Omega_1\cup\Omega_2$ 且为开集. 而 N 在 $\overline{\Omega}$ 上是 L-紧的, 当 $x\in\partial\Omega\cap D(L)$ 时, 对 $\forall\lambda\in(0,1)$, 都有 $Lx\neq\lambda Nx$. $\forall x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker} L$ 时, 由算子 Q 的定义知

$$(QN)(x)=\frac{1}{T}\int_0^T[-f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))-\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))+p(t)]\,\mathrm{d}t\neq 0$$

作变换

$$H(x,\alpha)=-\alpha x-\frac{1}{T}(1-\alpha)\int_0^T(f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\beta(t)g(x)-p(t))\,\mathrm{d}t,\alpha\in[0,1]$$

当 $x\in\partial\Omega\cap\operatorname{Ker} L$ 及 $\alpha\in[0,1]$ 时, 有

$$xH(x,\alpha)=-\alpha x^2-\frac{x}{T}(1-\alpha)\int_0^T(f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\beta(t)g(x)-p(t))\,\mathrm{d}t\neq 0$$

故 $H(x,\alpha)$ 为同伦映射, 取 J 为恒同映射, 有

$$\deg(JQN,\Omega\cap\operatorname{Ker} L,0)=\deg(-x,\Omega\cap\operatorname{Ker} L,0)\neq 0$$

由引理 1 知, 方程(1)至少存在一个 T-周期解.

为了下面的证明, 假设 $f(t,x,y,v)=f_1(t,x,y,v)+f_2(t,x,y,v)$, 其中 $f_1(t,x,y,v)$ 和 $f_2(t,x,y,v)$ 均在 $\mathbf{R}^4$ 上连续, 且 $\forall(t,x,y,v)\in\mathbf{R}^4$, $f_1(t,x,y,v)$ 和 $f_2(t,x,y,v)$ 都是关于 t 的 T-周期函数.

定理 2 若 $\inf_{(t,x,y,v)\in\mathbf{R}^4}f_1(t,x,y,v)\geqslant 0$, $\sup_{(t,x,y,v)\in\mathbf{R}^4}|f_2(t,x,y,v)|=\delta<\frac{1}{2T}$, 且定理 1 中的条件②-④仍满足, 则当 $r<\frac{1}{2\beta_1T^2}$ 时, 方程(1)至少存在一个 T-周期解.

证明 设 $\Omega_3=\{x \mid x\in D(L), Lx=\lambda Nx, \lambda\in(0,1)\}$, $\forall x\in\Omega_3$, 有

$$x''(t)+\lambda f(t,x(t),x(t-\tau_0(t)),x'(t))+\lambda\beta(t)g(x(t-\tau_1(t)))=\lambda p(t)\tag{11}$$

类似于定理 1 中的证明, 可知存在 $t'_0\in[0,T]$ 和 $K_2^*>0$, 使得 $|x(t'_0)|\leqslant K_2^*$, 其中 K_2^* 是与 λ 无关的常数. 另有

$$\|x\|_\infty\leqslant K_2^*+\int_0^T|x'(t)|\,\mathrm{d}t,\ \|x'\|_\infty\leqslant\int_0^T|x''(t)|\,\mathrm{d}t$$

由 $\lim\limits_{|x|\to+\infty}\sup\left|\frac{g(x)}{x}\right|\leqslant r$ 可知, 对给定的 $\varepsilon=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2\beta_1T^2}-r\right]$, 存在 $M_2>0$, 使得当 $|x(t-\tau_1(t))|\geqslant M_2$ 时, 有

$$|g(x(t-\tau_1(t)))|\leqslant(r+\varepsilon)|x(t-\tau_1(t))|\tag{12}$$

设 $E'_1=\{t \mid t\in[0,T], |x(t-\tau_1(t))|\geqslant M_2\}$, $E'_2=\{t \mid t\in[0,T], |x(t-\tau_1(t))|<M_2\}=[0,T]\setminus E'_1$, 仍记 $\rho=\max\limits_{|x|\leqslant M_2}|g(x)|$.

因为 $x(0)=x(T)$, 由罗尔定理可知存在 $t_3\in[0,T]$, 使得 $x'(t_3)=0$. 在式(11)两边同乘以 $x'(t)$, 并从 t_3 到 t 积分, 于是有

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}[x'(t)]^2=&-\lambda\int_{t_3}^t f(s,x(s),x(s-\tau_0(s)),x'(s))x'(s)\,\mathrm{d}s-\\
&\lambda\int_{t_3}^t\beta(s)g(x(s-\tau_1(s)))x'(s)\,\mathrm{d}s+\lambda\int_{t_3}^t p(s)x'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&-\lambda\int_{t_3}^t f_2(s,x(s),x(s-\tau_0(s)),x'(s))x'(s)\,\mathrm{d}s-\\
&\lambda\int_{t_3}^t\beta(s)g(x(s-\tau_1(s)))x'(s)\,\mathrm{d}s+\lambda\int_{t_3}^t p(s)x'(s)\,\mathrm{d}s\leqslant\\
&\int_{t_3}^{t_3+T}|f_2(s,x(s),x(s-\tau_0(s)),x'(s))||x'(s)|\,\mathrm{d}s+\\
&\int_{t_3}^{t_3+T}|\beta(s)||g(x(s-\tau_1(s)))||x'(s)|\,\mathrm{d}s+\int_{t_3}^{t_3+T}|p(s)||x'(s)|\,\mathrm{d}s=\\
&\int_0^T|f_2(s,x(s),x(s-\tau_0(s)),x'(s))||x'(s)|\,\mathrm{d}s+
\end{aligned}$$

$$\int_0^T |\beta(s)||g(x(s-\tau_1(s)))||x'(s)|ds + \int_0^T |p(s)||x'(s)|ds \leqslant$$
$$\delta\int_0^T |x'(t)|dt + T|p|_\infty |x'|_\infty + \beta_1\int_{E'_1} |g(x(t-\tau_1(t)))||x'(t)|dt +$$
$$\beta_1\int_{E'_2} |g(x(t-\tau_1(t)))||x'(t)|dt \leqslant$$
$$T\delta\|x'\|_\infty + TC_0\|x'\|_\infty + \beta_1(r+\varepsilon)T\|x\|_\infty\|x'\|_\infty$$

其中 C_0 定义同前，则

$$\|x'\|_\infty^2 = \max_{t\in[t_3,t_3+T]}\{|x'(t)|^2\} \leqslant 2T\delta\|x'\|_\infty + 2TC_0\|x'\|_\infty + 2\beta_1(r+\varepsilon)T\|x\|_\infty\|x'\|_\infty$$
$$\|x'\|_\infty \leqslant 2T\delta + 2TC_0 + 2\beta_1(r+\varepsilon)T(K_2^* + \|x'\|_\infty T)$$

因此

$$\|x'\|_\infty \leqslant \frac{2T\delta + 2TC_0 + 2\beta_1(r+\varepsilon)TK_2^*}{1-2\beta_1(r+\varepsilon)T^2} =$$
$$\frac{4T^2\delta + 4C_0T^2 + 2\beta_1K_2^*rT^2 + K_2^*}{T-2\beta_1rT^3} = M_3$$

因为 $\|x\|_\infty \leqslant K_2^* + \|x'\|_\infty T$，所以一定存在某个与 λ 无关的 $M'>0$，使得 $\|x\|_\infty \leqslant M'$，$\|x'\|_\infty \leqslant M'$，故 Ω_3 为有界集.

其余证明同定理 1，此略. 证毕.

参考文献：

[1] DING T R. Nonlinear Oscillations at a Point of Resonance[J]. Science in China (ser A), 1982, 25(9): 918-931

[2] 葛渭高.一类 n 维 - Liénard 方程的调和解[J].数学年刊，1990，11A(3)：297-307

[3] 黄先开.具有时滞的保守系统的 2π 周期解[J].系统科学与数学，1989，9(4)：298-308

[4] 施吕蓉，周宗福，高伟.一类二阶具多偏差变元微分方程的周期解[J].山西师范大学学报：自然科学版，2012，26(4)：12-17

[5] 鲁世平，葛渭高.一类二阶具偏差变元的微分方程周期解[J].数学学报，2002，45(4)：811-818

[6] 郭承军，王根强.一类二阶具多偏差变元微分方程周期解的存在性[J].中山大学学报：自然科学版，2007，46(6)：5-9

[7] 汪娜，鲁世平.一类三阶具偏差变元微分方程的周期解[J].安徽师范大学学报：自然科学版，2006，29(1)：17-22

[8] 施吕蓉，周宗福，高伟.一类三阶具多偏差变元微分方程的周期解[J].重庆工商大学学报：自然科学版，2013，30(1)：6-15

[9] OMARI P, ZANOLIN P. Anote on Nonlinear Oscillation at Resonance[J].Acta Math Sinica，1987，3(3)：351-361

Periodic Solutions of the Second Order Differential Equation with Deviating Arguments

DENG Rui-juan

(Wuhu Institute of Technology, Wuhu 241000, China)

Abstract: Using the Mawhin continuation theorem, this paper studies a class of periodic solutions of the second order differential equation with deviating arguments $x''(t) + f(t, x(t), x(t-\tau_0(t)), x'(t)) + \beta(t)g(x(t-\tau_1(t))) = p(t)$, and two sufficient conditions of the periodic solutions are obtained.

Keywords: the Mawhin continuation theorem; deviating arguments; periodic solutions