doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.013

关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$

苟莎莎
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

摘 要:运用递归序列和平方剩余的方法,证明了不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x,y)=(4,3)$.

关键词:不定方程;整数解;递归序列;平方剩余
中图分类号:O156.2 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)09-0048-05

当 $(p,q)=1,p,q\in\mathbf{N}$ 时,形如 $px(x+1)(x+2)(x+3)=qy(y+1)(y+2)(y+3)$ 的不定方程已经有不少研究工作[1-11].1971 年,Cohn[1]证明了 $(p,q)=(1,2)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(5,4)$;1975 年,Ponnudurait [2]证明了 $(p,q)=(1,3)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(3,2),(7,5)$;1982 年,宣体佐[3]证明了 $(p,q)=(1,5)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(2,1)$;1982 年,曹珍富[4]证明了 $(p,q)=(3,2)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(8,9)$;1991 年,罗明[5]证明了 $(p,q)=(1,7)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(4,2)$;2001 年,LuoMing[6]证明了 $(p,q)=(1,6)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(7,4)$;2007 年,程瑶等[7]证明了 $(p,q)=(1,11)$ 时,无正整数解;2009 年,段明辉等[8]证明了 $(p,q)=(1,19)$ 时,无正整数解;2009 年,罗明等[9]证明了 $(p,q)=(3,5)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(7,6)$;2012 年,瞿云云等[10]证明了 $(p,q)=(1,15)$ 时,仅有正整数解 $(x,y)=(3,1),(25,12)$.但是对于 p,q 均大于 1,且为不相连素数的情况鲜有研究.

此处将运用递归数列方法证明 $(p,q)=(3,7)$ 时,不定方程

$$3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3) \tag{1}$$

仅有一组正整数解 $(x,y)=(4,3)$.首先将方程化(1)为

$$[3(x^2+3x+1)]^2-21(y^2+3y+1)^2=-12 \tag{2}$$

易知方程 $x^2-21y^2=-12$ 的全部整数解由以下 4 个非结合类给出:

$$x_n+y_n\sqrt{21}=\pm(3+\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(3+\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\bar{x}_n+\bar{y}_n\sqrt{21}=\pm(-3+\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(-3+\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$x'_n+y'_n\sqrt{21}=\pm(18+4\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(18+4\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n,n\in\mathbf{Z}$$

$$\bar{x}'_n+\bar{y}'_n\sqrt{21}=\pm(-18+4\sqrt{21})(u_n+v_n\sqrt{21})=\pm(-18+4\sqrt{21})(55+12\sqrt{21})^n,n\in\mathbf{Z}$$

其中 $3+\sqrt{21}$,$18+4\sqrt{21}$ 是 $x^2-21y^2=-12$ 的相应结合类的基本解,$55+12\sqrt{21}$ 是 Pell 方程 $u^2-21v^2=1$ 的基本

收稿日期:2014-11-01;**修回日期**:2015-01-10.
作者简介:苟莎莎(1991-),女,四川广元人,硕士研究生,从事代数数论研究.

解.从方程(2)可知 $2\nmid x^2+3x+1$,从而舍去后面两个结合类.于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=4y_n+5$$

$$(2y+3)^2=4\bar{y}_n+5$$

容易看出 $\bar{y}_n=y_{-n}$,于是方程(2)的解应满足

$$(2y+3)^2=\pm 4y_n+5,n\in\mathbf{Z} \tag{3}$$

容易验证下列关系式(4)-(10)成立:

$$u_{n+1}=110u_n-u_{n-1},u_0=1,u_1=55 \tag{4}$$

$$v_{n+1}=110v_n-v_{n-1},v_0=0,v_1=12 \tag{5}$$

$$u_{2n}=2u_n^2-1,v_{2n}=2u_nv_n \tag{6}$$

$$y_{n+1}=110y_n-y_{n-1},y_0=1,y_1=91 \tag{7}$$

$$y_n=u_n+3v_n \tag{8}$$

$$u_{n+2h}\equiv -u_n(\bmod u_h),v_{n+2h}\equiv -v_n(\bmod u_h) \tag{9}$$

$$y_{n+2h}\equiv -y_n(\bmod u_h) \tag{10}$$

下面将分别证明式(3)当且仅当 $n=0$,或者 $n=-1$ 时成立,由此求得方程(2)的全部整数解,进而求得式(1)的全部正整数解.

1　关于 $(2y+3)^2=4y_n+5$ 证明

本节考察 n 取何值时 $4y_n+5$ 为完全平方数.在做此工作之前先介绍几个引理.

引理 1　设 $2\mid n,n>0$,则 $\left(\frac{\pm 12v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=-\left(\frac{5u_n\pm 12}{223}\right)$.

证明　由式(6)知 $2\mid n$时,$u_n\equiv 1(\bmod 4)$,$v_n\equiv 0(\bmod 4)$,所以 $u_n^2+21v_n^2\equiv 1(\bmod 8)$,并且当 $2\mid n$时,$u_n\equiv 1(\bmod 7)$,对 $\forall n$,$u_n\equiv 1(\bmod 3)$,再次应用式(6)可推知:

$$\left(\frac{\pm 12v_{2n}+5}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{\pm 24u_nv_n+10u_n^2}{u_{2n}}\right)=\left(\frac{u_n}{u_{2n}}\right)\left(\frac{\pm 12v_n+5u_n}{u_{2n}}\right)=$$

$$\left(\frac{u_{2n}}{u_n}\right)\left(\frac{u_{2n}}{\pm 12v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{-1}{u_n}\right)\left(\frac{21v_n^2+u_n^2}{\pm 12v_n+5u_n}\right)=$$

$$\left(\frac{669}{\pm 12v_n+5u_n}\right)=\left(\frac{3}{\pm 12v_n+5u_n}\right)\left(\frac{223}{\pm 12v_n+5u_n}\right)=-\left(\frac{5u_n\pm 12v_n}{223}\right)$$

证毕.

引理 2　若 $4y_n+5$ 为平方数,则必须 $n\equiv 0,-1(\bmod 2^4\times 3^2\times 5^2)$.

证明　在此次证明中采用对序列$\{4y_n+5\}$取模的方法证明.由于数字比较大,证明分 3 步进行.

1) 先证明 $n\equiv 0,-1(\bmod 2^4)$.

mod 17,排除 $n\equiv 1,2,3,4,7,14(\bmod 16)$,此时 $4y_n+5\equiv 12,6,6,6,12,14,14(\bmod 17)$,剩余 $n\equiv 0,5,6,8,9,10,11,12,13,15(\bmod 16)$;mod 31,排除 $n\equiv 9,10,11,12(\bmod 16)$,此时 $4y_n+5\equiv 13,21,21,13(\bmod 31)$;

mod 193,排除 $n\equiv 6,8,13,15 \pmod{32}$,此时 $4y_n+5\equiv 122,180,180,122 \pmod{193}$;mod 1 493,排除 $n\equiv 24,29 \pmod{32}$,此时 $4y_n+5\equiv 1\,007,1\,007 \pmod{1\,439}$;mod 191,排除 $n\equiv 16,21,22,53,54 \pmod{64}$,此时 $4y_n+5\equiv 76,91,89,110,112 \pmod{191}$;剩 $n\equiv 0,5,-1 \pmod{16}$,mod 263,排除 $n\equiv 5 \pmod 8$,此时 $4y_n+5\equiv 167(263)$,即 $n\equiv 0,-1 \pmod{2^4}$.

2) 再证明 $n\equiv 0,-1 \pmod{3^2}$.

mod 53,排除 $n\equiv 1,2,4,5 \pmod 9$,此时 $4y_n+5\equiv 51,26,30,14 \pmod{53}$;mod 379,排除 $n\equiv 6,12 \pmod{18}$,此时 $4y_n+5\equiv 375,10 \pmod{379}$; mod 3 511,排除 $n\equiv 3,7,15,16 \pmod{18}$,此时 $4y_n+5\equiv 807,2\,182,2\,718,1\,339 \pmod{3511}$;剩余 $n\equiv 0,8,9,17 \pmod{18}$,即 $n\equiv 0,-1 \pmod{3^2}$.

3) 最后证明 $n\equiv 0,-1 \pmod{5^2}$.

mod 199,排除 $n\equiv 1,2,3,4,5,6,7,10,11,12,14,16,17,19,21,22,23 \pmod{25}$,此时 $4y_n+5\equiv 170,42,129,76,129,42,170,3,107,83,192,83,107,3 \pmod{199}$;mod 32 051,排除 $n\equiv 15 \pmod{25}$,此时 $4y_n+5\equiv 1\,749 \pmod{32\,051}$;mod 421,排除 $n\equiv 3 \pmod 5$,此时 $4y_n+5\equiv 362 \pmod{421}$;mod 151,排除 $n\equiv 9,20,34 \pmod{50}$,此时 $4y_n+5\equiv 133,129,28 \pmod{151}$;mod 1 619,排除 $n\equiv 5,15 \pmod{20}$,此时 $4y_n+5\equiv 141,1\,488 \pmod{1\,619}$;剩余 $n\equiv 0,24,49,50,74,99 \pmod{100}$,即 $n\equiv 0,-1 \pmod{5^2}$.证毕.

引理 3 设 $n\equiv 0 \pmod{2^4\times 3^2\times 5^2}$ 且 $n>0$,则 $4y_n+5$ 不为完全平方数.

证明 令 $n=2\times k\times 3^2\times 5^2\times 2^t$,$(t\geqslant 3, 2\nmid k)$,对 $\{5u_n\pm 12v_n\}$ 取模 223,所得的两个剩余序列周期均为 56,而对 $\{2^t\}$ 模 56 的剩余序列具有周期 3.下面对 k 分两种情况讨论.

a) $k\equiv 1 \pmod 4$ 时,令

$$m=\begin{cases} 2^t, & t\equiv 0 \pmod 3 \\ 5\cdot 2^t, & t\equiv 1 \pmod 3 \\ 3^2\cdot 2^t, & t\equiv 2 \pmod 3 \end{cases}$$

则有表 1.

其中第一行表示 $t(t\geqslant 3) \pmod 3$,第二行表示 $m \pmod{56}$,第三行表示 $5u_m+12v_m(223)$.特别地,当 $t=1$ 时,取 $m=22$,此时 $5u_m+12v_m\equiv 112 \pmod{223}$;当 $t=2$ 时,取 $m=4$,此时 $5u_m+12v_m\equiv 199 \pmod{223}$.对表 1 中所有 m,以及特殊的 $t=1,2$ 时的 m,均有 $\left(\dfrac{5u_m+12v_m}{223}\right)=1$.于是由式(9)(10)及引理 1,有 $4y_n+5\equiv 4y_{2m}+5\equiv 12v_{2m}+5 \pmod{u_{2m}}$.于是得到

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{12v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{5u_m+12v_m}{223}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.

b) $k\equiv -1 \pmod 4$ 时,令

$$m\begin{cases} 2^t, & t\equiv 2 \pmod 3 \\ 5\cdot 2^t, & t\equiv 1 \pmod 3 \\ 3\cdot 2^t, & t\equiv 0 \pmod 3 \end{cases}$$

则有表 2.

表 1　$k\equiv 1(\bmod 4)$ 情况下的数据

0	1	2
8	24	8
153	139	153

表 2　$k\equiv -1(\bmod 4)$ 情况下的数据

0	1	2
32	48	32
139	153	139

其中第一行表示 $t(t\geqslant 3)(\bmod 3)$,第二行表示 $m(\bmod 56)$,第三行表示 $5u_m-12v_m(\bmod 223)$.对表 2 中所有 m,均有 $\left(\frac{5u_m-12v_m}{223}\right)=1$,于是由式(9)(10)及引理 1,有 $4y_n+5\equiv -4y_{2m}+5\equiv -12v_{2m}+5(\bmod u_{2m})$.于是得到

$$\left(\frac{4y_n+5}{u_{2m}}\right)=\left(\frac{-12v_{2m}+5}{u_{2m}}\right)=-\left(\frac{5u_m-12v_m}{223}\right)=-1$$

从而 $4y_n+5$ 是非平方数.证毕.

引理 4　设 $n\equiv -1(\bmod 2^4\times 3^2\times 5^2)$,则仅当 $n=-1$ 时,$4y_n+5$ 为完全平方数.

证明　如果 $n\equiv -1(\bmod 2^4\times 3^2\times 5^2)$ 且 $n\neq -1$,则可令 $n=-1+2\cdot k\times 3^2\times 5^2\times 2^t$,$(t\geqslant 3,2\nmid k)$,由式(9)知,$4y_n+5\equiv -4y_{-1}+5\equiv -71(\bmod u_m)$,又 $2\mid m$时,$u_m\equiv 1(\bmod 4)$,从而 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=\left(\frac{-71}{u_m}\right)=\left(\frac{71}{u_m}\right)=\left(\frac{u_m}{71}\right)$.

对 $\{u_m\}$ 取模 71,所得的剩余序列周期为 24,而对 $\{2^t\}$ 模 24 的剩余序列具有周期 2.令

$$m\begin{cases}2^t, & t\equiv 1(\bmod 2)\\ 3^2\cdot 2^t, & t\equiv 0(\bmod 2)\end{cases}$$

特别地,当 $t=1$ 时,取 $m=2$,此时 $u_m\equiv 14(\bmod 71)$;当 $t=2$ 时,取 $m=1$,此时 $u_m\equiv 61(\bmod 71)$.对所有 m,包括特殊的 $t=1,2$ 时的 m,均有 $\left(\frac{u_m}{71}\right)=-1$.于是可知 $\left(\frac{4y_n+5}{u_m}\right)=-1$,即 $4y_n+5$ 不为平方数,假设不成立.当$n=-1$ 时,$4y_n+5=9^2$.证毕.

2　关于 $(2y+3)^2=4\bar{y}_n+5$ 的证明

引理 5　仅当 $n=0$ 时,$4\bar{y}_n+5$ 是平方数.

证明　要使 $4\bar{y}_n+5\geqslant 0$ 成立,即 $y_n\leqslant 1$,当且仅当 $n=0$ 时成立,此时 $4\bar{y}_n+5=1$.证毕.

3　结　论

综合以上结果,现给出主要结论.

定理 1　不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解.

证明　由引理 5 知

$$(2y+3)^2=4\bar{y}_0+5=1$$

因此 $y=-1,-2$.由引理 1,2 知

$$(2y+3)^2=4y_0+5=9$$

因此 $y=0,-3$.

$$(2y+3)^2=4y_{-1}+5=81$$

因此 $y=3,-6$.

由此,容易知道方程(1)有 16 组解,其中有 4 组解是非平方解,它们是 $(4,3)$,$(-7,3)$,$(-7,-6)$,$(4,-6)$.

因此,不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ 仅有正整数解 $(x,y)=(4,3)$.

参考文献:

[1] COHN J E. The Diophantine Equations $x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. Pacific J Math,1971(37):311-335

[2] PONNUDUEAIT. The Diophantine Equation $x(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)$[J]. J London Math soc,1975(10):232-240

[3] 宣体佐.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].北京师范大学学报:自然科学版,1982(3):27-34

[4] 曹珍富.关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)$[R].哈尔滨工业大学科研报告,1982

[5] 罗明.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].重庆师范学院学报:自然科学版,1991,8(1):1-8

[6] LUO M. The Diophantine Equations $x(x+1)(x+2)(x+3)=6y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].Indian J Pure Appl Math,2001(1):3-7

[7] 程瑶,马玉林.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=11y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].重庆师范学院学报:自然科学版,2007,24(3):27-30

[8] 段辉明,杨春德.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(1):60-63

[9] 罗明,朱德辉,马芙蓉.关于不定方程 $3x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].西南师范大学学报:自然科学版,2009,34(5):16-21

[10] 瞿云云,曹慧,罗永贵,等.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=15y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].西南师范大学学报:自然科学版,2012,37(6):9-14

[11] 柯召,孙琦.谈谈不定方程[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1980

On the Diophantine Equation $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$

GOU Sha-sha

(School of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing 400715, China)

Abstract: By using the method of recurrence sequences and quadratic remainders, this paper proves that the Diophantine equation $3x(x+1)(x+2)(x+3)=7y(y+1)(y+2)(y+3)$ has unique positive integer solution $(x,y)=(4,3)$.

Keywords: diophantine equation; integer solution; recurrence sequence; quadratic remainder.