doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.009

从三个角度考察柯西不等式

咸伟志
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:柯西不等式是高等数学中的重要不等式,它在解析几何、数学分析与高等代数这 3 门数学专业主干基础课程中均有渗透.从这 3 门课程的角度,分别给出柯西不等式的不同形式和证明过程,并简要地阐述它们的联系,最后做出小结.

关键词:柯西不等式;数量积;定积分;欧氏空间;内积

中图分类号:O122.3 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)09-0033-06

解析几何、数学分析和高等代数是大学数学类专业的 3 门主干基础课程,即通常所说的"三高"课程.虽然"三高"课程的理论不同,处理问题的思想方法也不同,但它们也能相互联系,相互渗透,从不同的角度诠释同一件事物,如点到平面的距离公式[1].事实上,著名的柯西不等式是一个很好的例证,尽管它在"三高"课程中的表现形式不同,证明方法不同,但本质上具有很强的联系和一致性,下面将分别论述.对于柯西不等式的 3 种形式,其证明过程所涉及的内容均作为预备知识提出,不再赘言.

1 解析几何的角度

1.1 相关预备知识

定义 1[2] 两个向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的模和他们夹角的余弦的乘积叫做向量$\vec{a}$和$\vec{b}$的数量积,记做$\vec{a}\cdot\vec{b}$,即$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}\cdot\vec{b})$.特别地,$\vec{a}^2=|\vec{a}|^2$.

定理 1[2] **(数量积的坐标表示公式)** 在直角坐标系 $O-xyz$ 中,向量$\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$和$\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$,则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

1.2 柯西不等式在解析几何中的形式及证明

形式Ⅰ $\left(\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^2(a_i,b_i\in\mathbf{R},i=1,2,3)$,当且仅当$\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$时,等号成立.

证明 设$\vec{a}=\{a_1,a_2,a_3\}$,$\vec{b}=\{b_1,b_2,b_3\}$,因为$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}\cdot\vec{b})$,$|\cos\angle(\vec{a}\cdot\vec{b})|\leqslant1$,所以$|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\left||\vec{a}||\vec{b}|\cos\angle(\vec{a}\cdot\vec{b})\right|\leqslant|\vec{a}||\vec{b}|$,当且仅当$|\cos\angle(\vec{a}\cdot\vec{b})|=1$时,等号成立,即$\sum\limits_{i=1}^{3}a_ib_i\leqslant\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{3}b_i^2}$,当且仅当$\vec{a}$和$\vec{b}$共线时,等号成立.

收稿日期:2014-12-07;**修回日期**:2015-01-16.

* **基金项目**:重庆市重点实验室专项基金项目(CSTC2011KLORSE01).

作者简介:咸伟志(1994-),男,江苏南京人,从事数学与应用数学研究.

所以$\left(\sum_{i=1}^{3} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{3} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{3} b_i^2$,当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}$时,等号成立.

注 1:令 $a_3=b_3=0$,则得到形式Ⅰ的二维形式.

形式Ⅰ的证明从三维空间向量的角度使得对柯西不等式有了较为直观的理解.事实上,受形式Ⅰ的启发,利用数学归纳法,可得到解析几何角度下不等式的推广形式:

形式Ⅱ $\forall n \in \mathbf{N}^+$,$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2(a_i, b_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,n)$,当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_n}{b_n}$时,等号成立.

证明 ① 当 $n=1,2,3$ 时,结论已成立.

② 假设当 $n=k(k \geqslant 3)$时,结论成立.

即$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i^2(a_i, b_i \in \mathbf{R}, i=1,2,\cdots,k)$,当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$时,等号成立.则

$$\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{k+1} b_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2\right) \cdot \left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2\right) =$$
$$\sum_{i=1}^{k} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2 \cdot b_{k+1}^2 \geqslant$$
$$\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 + b_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i^2 + a_{k+1}^2 \cdot b_{k+1}^2 = S$$

当且仅当$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\cdots=\frac{a_k}{b_k}$时,等号成立.

而

$$S - \left(\sum_{i=1}^{k+1} a_i b_i\right)^2 = S - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i + a_{k+1} b_{k+1}\right)^2 = S - \left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 - 2a_{k+1} b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i b_i - a_{k+1}^2 b_{k+1}^2 =$$
$$b_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2 \cdot \sum_{i=1}^{k} b_i^2 - 2a_{k+1} b_{k+1} \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i b_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i b_{k+1} - b_i a_{k+1})^2 \geqslant 0$$

当且仅当$\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_k}{b_k}$时,等号成立.

综上可得,当 $n=k+1$ 时,结论亦成立.

2 数学分析的角度

2.1 相关预备知识

定理 2[3]**(定积分的相关性质)** 设$f(x)$和 $g(x)$在$[a,b]$上可积,有

1)(定积分的单调性) 若$f(x) \leqslant g(x)$,则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$,当且仅当$f(x)=g(x)$时,等号成立;特别地,$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$;

2)(定积分的线性性) 对$\forall \lambda, \mu \in \mathbf{R}$,$\lambda f(x) \pm \mu g(x)$在$[a,b]$上也可积,且$\int_a^b (\lambda f(x) \pm \mu g(x))\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \pm \mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

注 2:对于二重积分和三重积分,单调性和线性性仍然成立.

定理 3[3]　若矩形 $D=[a,b;c,\mathrm{d}]$,二元函数 $f(x,y)=g(x)\cdot h(y)$,则 $\iint\limits_D f(x,y)=\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_c^d h(y)\mathrm{d}y$.

2.2　柯西不等式在数学分析中的形式及证明

形式Ⅲ　设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上可积,则

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

当且仅当 $f(x)=\mu g(x)$ (或 $g(x)=\lambda f(x)$)时,等号成立.

证明　$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y=\iint\limits_D f^2(x)\cdot g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 $D=[a,b;c,\mathrm{d}]$.同理,$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x=\iint\limits_D g^2(x)\cdot f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

因为 $m^2+n^2\geqslant 2mn$,当且仅当 $m=n$ 时,等号成立,所以

$$\begin{aligned}\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D f^2(x)\cdot g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D g^2(x)\cdot f^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)=\\&\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(f^2(x)\cdot g^2(y)+g^2(x)\cdot f^2(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geqslant\\&\frac{1}{2}\iint\limits_D\left(2f(x)\cdot g(y)\cdot g(x)\cdot f(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\\&\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\cdot g(y)\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2\end{aligned}$$

当且仅当 $f(x)\cdot g(y)=g(x)\cdot f(y)$,即 $f(x)=\lambda g(x)$ (或 $g(x)=\lambda f(x)$)时,等号成立.

3　高等代数的角度

3.1　相关预备知识

定义 2[4]　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上的线性空间,在 V 上定义了一个二元实函数,称为内积,记作 (α,β),如果它具有以下性质:对 $\forall\alpha,\beta,\gamma\in V,k\in\mathbf{R}$,有

① $(\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)$;

② $(k\alpha,\beta)=k(\alpha,\beta)$;

③ $(\alpha+\beta,\gamma)=(\alpha,\gamma)+(\beta,\gamma)$;

④ $(\alpha,\alpha)\geqslant 0$,当且仅当 $\alpha=0$ 时等号成立.

这样的线性空间 V 称为欧几里得空间,简称欧氏空间.

定义 3[4]　非负实数 $\sqrt{(\alpha,\alpha)}$ 称为向量 α 的长度,记为 $|\alpha|$.

3.2　柯西不等式在高等代数中的形式及证明

形式Ⅳ　$\forall$ 向量 α,β,有 $|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$,当且仅当 α,β 线性相关时,等号成立.

证明　若 $\alpha=0$,结论显然成立.若 $\alpha\neq 0$,作 $\gamma=t\alpha+\beta$,则由内积定义 2 的第④条,有 $(\gamma,\gamma)\geqslant 0$,即 $(t\alpha+\beta,t\alpha+\beta)=(\alpha,\alpha)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)\geqslant 0$.令 $f(t)=(\alpha,\alpha)t^2+2(\alpha,\beta)t+(\beta,\beta)$,则 $f(t)$ 是关于 t 且恒大于等于零的二次函数,所以 $\Delta=(2(\alpha,\beta))^2-4(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)\leqslant 0$,即 $(\alpha,\beta)^2\leqslant(\alpha,\alpha)\cdot(\beta,\beta)$,两边开方,得 $|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$.当 α,β 线性相关时,等号显然成立;反过来,当等号成立时,有 $\Delta=0$,所以二次函数 $f(t)$ 有两个相同的根,即存在 t 使得 $f(t)=(\gamma,\gamma)=0$,由第④条等式的成立条件可知,存在 t 使得 $\gamma=t\alpha+\beta=0$,即 α,β 线性相关.

综上,$|(\alpha,\beta)|\leqslant|\alpha||\beta|$,当且仅当 α,β 线性相关时,等号成立.

4 三个角度下的柯西不等式之间的关系

4.1 高等代数中的形式具有高度的概括性

事实上,不同形式下的柯西不等式均统一于欧氏空间两向量的内积运算之中.

在线性空间 $\mathbf{R}^n$ 中,对于向量 $\alpha=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 和 $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$ 可定义内积 $(\alpha,\beta)=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n$,则 $\boldsymbol{R}^n$ 就是一个欧氏空间.

注 3:① 不难发现,数量积是特殊的内积,故通常解析几何教材中,又将数量积称为内积.

② 正是由于欧氏空间中柯西不等式的成立,才得以定义欧氏空间中两向量的夹角 $<\alpha,\beta>=\arccos\dfrac{(\alpha,\beta)}{|\alpha||\beta|}$,这为三维几何空间夹角的由来提供了理论基础.

在闭区间 $[a,b]$ 上所有可积函数所构成的线性空间中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 可定义内积 $(f(x),g(x))=\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x$,则该线性空间就构成了一个欧氏空间.

综上,形式Ⅱ和形式Ⅲ可看做是形式Ⅳ的特殊形式.

4.2 由解析几何角度下的推广形式证明数学分析中的形式

若 $\forall n\in\mathbf{N}^+,\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2(a_i,b_i\in\mathbf{R},i=1,2,\cdots,n)$ 成立,则对在闭区间 $[a,b]$ 上可积的任意函数 $f(x)$ 和 $g(x)$,有 $\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$.

证明 先引入引理 A

引理 A 若级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$ 收敛,则 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$.

因为 $\left(\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$,所以 $S_n=\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_i|\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2}$,$S_n$ 单调递增有上界,S_n 收敛,即 $\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i$ 绝对收敛.

因为 $\forall n\in\mathbf{N}^+$, $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2$, 令 $n\to\infty$, 由极限的保序性, 所以 $\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right)^2=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2\leqslant\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)=\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$, 引理 A 得证.

将 $[a,b]$ 区间 n 等分,取 $\xi_i=a+\dfrac{i(b-a)}{n}$,$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}(i=1,2,\cdots,n)$,根据定积分的定义,有

$$\int_a^b f(x)^2\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)^2\cdot\Delta x_i=\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)^2\cdot\Delta x_i$$

同理

$$\int_a^b g(x)^2\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}g(\xi_i)^2\cdot\Delta x_i,\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\cdot g(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

令 $a_i=f(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}$,$b_i=g(\xi_i)\sqrt{\Delta x_i}$,则级数 $\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2$ 收敛.根据引理 A,得

$$\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)\cdot g(\xi_i)\cdot\Delta x_i=\left(\sum_{i=1}^{\infty}a_ib_i\right)^2\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}a_i^2\cdot\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2=$$

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}f(\xi_i)^2\cdot\Delta x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{\infty}g(\xi_i)^2\cdot\Delta x_i\right)$$

即

$$\left(\int_a^b f(x)\cdot g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \cdot \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

4.3　用数学分析的知识证明解析几何角度下的推广形式

尽管形式Ⅱ是受形式Ⅰ的启发,对 n 利用数学归纳法所得到的解析几何角度下的推广形式,但该形式也可利用数学分析中的相关知识进行证明.

定理 4[5]**(凸函数的判别法)**　设 $f(x)$ 在区间 I 上二阶可导,则 $f(x)$ 在 I 上为凸函数的充要条件是$f''(x)\geqslant 0$.

定理 5[5]**(Jenson 不等式)**　$f(x)$ 在 I 上为凸函数的充要条件是:对 $\forall x_i \in I, \lambda_i \geqslant 0 (i=1,2,\cdots,n)$,$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i \geqslant 0$,有如下不等式(1)成立:

$$f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i} \tag{1}$$

下文将利用以上两个定理 4,定理 5,证明形式Ⅱ.

证明　考察函数 $f(x)=x^2$,$f''(x)=2>0$,由定理 4 知,$f(x)=x^2$ 是 $\mathbf{R}$ 上的凸函数.

根据定理 5,可得不等式 $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}\right)^2 \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i}$,即$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}\lambda_i$,令 $\lambda_i = a_i^2$,$x_i=\frac{b_i}{a_i}$,可得 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}b_i^2$.

5　结　语

在“三高”课程中,解析几何是借助坐标系用代数方法解决几何问题的学科;数学分析主要研究的是函数,研究函数的性质、微分和积分等内容,它往往通过函数模型来解决问题;而高等代数所讨论的是代数系统及其上的运算,如多项式环、线性空间等,它的特点是概念的高度抽象性和定理的高度概括性.一般而言,高等代数与解析几何的关系显得较为紧密,它们本质上是“数”与“形”的互动关系,高等代数中的理论可在解析几何中寻找模型,解析几何中的内容需依靠高等代数中的理论来支撑.

所举的柯西不等式在三个角度下的形式和证明以及它们的相互联系充分反映了数学思维的多样性与一致性,正所谓“殊途同归”.在“三高”课程的学习过程中,应经常反思三者的联系渗透之处,找出类似于柯西不等式这样的例子,并从三者不同的视角加以研究,以加深对例子本身以及“三高”课程的理解.

参考文献:

[1] 咸伟志.从三个角度证明点到平面的距离公式[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(9):27-30
[2] 吕林根.解析几何[M].4 版.北京:高等教育出版社,2006
[3] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].3 版.北京:高等教育出版社,2003
[4] 欧阳光中.数学分析[M].3 版.北京:高等教育出版社,2007
[5] 刘三阳.数学分析选讲[M].北京:科学出版社,2007

Make a Thorough Inquiry for Cauchy Inequality in Three Views

XIAN Wei-zhi

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Cauchy inequality is one of the most significant inequalities in higher mathematics. The inequality seeps in analytic geometry, mathematical analysis and higher algebra which are three main courses for the college students majored in mathematics. This paper proves different forms of Cauchy inequality from the perspective of the three courses and explores the relations among them. Finally the paper makes a brief summary.

Key words: Cauchy inequality; scalar product; definite integral; Euclidean space; inner product

(上接第 32 页)

令 $C_0=C_1\cup C_2$,其中 $C_1=\{(a,0)\mid a\in\mathbf{R}\}$,$C_2$ 由 C_0 中其余元素组成.

令映射 $f:\mathbf{R}\to C_1$,使得 $\forall a\in\mathbf{R}$,都有 $f(a)=(a,0)$.易知 f 是 $(\mathbf{R},+,\cdot)$ 到 $(C_1,+,\cdot)$ 的同构映射,故 $(\mathbf{R},+,\cdot)$ 是 $(C_0,+,\cdot)$ 的子域.C 中的运算由 f 的扩张决定,则 C 就是通常所说的复数域,且由于 $(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)$,所以 $\mathrm{i}=(0,1)$,$\mathrm{i}^2=-1$.

这就是由实数域 $\mathbf{R}$ 扩张为复数域 C 的过程.

参考文献:

[1] 姚慕生.抽象代数学[M].上海:复旦大学出版社,2011

[2] MICHAEL ARTIN.代数[M].北京:机械工业出版社,2009

[3] 韩士安,林磊.近世代数[M].北京:科学出版社,2009

[4] 周士藩.有限域上的代数闭域的性质[J].商丘师专学报:自然科学版, 1988(2):9-10

Research on the Extension of Fields

GUO Bao-yong

(College of Mathematics and System Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266590, China)

Abstract: Extension of fields is an important research content. Based on the existing fields, by the method of extension, new fields can be constructed. The understanding of number for people is the process of the extension of number fields. Algebraic extension can expand rational number field to real number field, real number field with the imaginary unit can be extended to complex field, and finite extension and algebraic extension have important connection. Based on the basic properties of the finite extension and algebraic extension, this paper researches the process of the extension of the real number field to the complex field.

Key words: finite extension; algebraic extension; real number field; complex field