doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.008

关于域的扩张研究

郭 宝 勇
(山东科技大学 数学与系统科学学院,山东 青岛 266590)

摘　要:域的扩张是域的一项重要的研究内容,根据已有的域,通过扩张的方法,可以构造新的域;代数扩张能将有理数域扩充为实数域,实数域添上虚数单位 i 可以扩充为复数域,而有限扩张和代数扩张又有着重要联系;在有限扩张与代数扩张的基本性质的基础上,进一步探讨了实数域扩充为复数域的过程.

关键词:有限扩张;代数扩张;实数域;复数域

中图分类号:O156.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0031-02

1　有限扩张和代数扩张

定义 1[1]　设域 K 是域 F 的扩域,K 作为域 F 上线性空间的维数,称为 K 对 F 的扩张次数,记为 $[K:F]$,若 $[K:F]<+\infty$,则称 K 是 F 的有限扩张.

定义 2[2]　设域 K 是域 F 的扩域,若 $\forall\alpha\in K$,α 都是 F 上的代数元,则称 K 是域 F 的代数扩张,否则称为超越扩张.

设 $F(\alpha)$ 是域 F 的单扩张,当 α 是 F 上的代数元时,$F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张且 $[F(\alpha):F]$ 为 α 在 F 上极小多项式的次数;当 α 是 F 上的超越元时,$F(\alpha)$ 是 F 的无限扩张.

例 1　令 $F=\mathbf{Q}$(有理数域),$u=\sqrt{-1}=\mathrm{i}$,则 $\mathbf{Q}(\sqrt{-1})=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b$ 为有理数$\}$,$\sqrt{-1}$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式为 $f(x)=x^2+1$,所以 $[\mathbf{Q}\sqrt{-1}:\mathbf{Q}]=2$.

例 2　令 $F=\mathbf{Q}$,取 $u=\pi$,由于 π 是有理数域 $\mathbf{Q}$ 上的超越元,所以 $\mathbf{Q}(\pi)=\left\{\dfrac{f(\pi)}{g(\pi)}\mid f,g \text{ 有理系数多项式且 } g\neq 0\right\}$,$[\mathbf{Q}(\pi):\mathbf{Q}]=+\infty$.

例 3　实数域 $\mathbf{R}$ 添上代数元 i 即为复数域,即 $C=\mathbf{R}(\mathrm{i})$.

定理 1　设域 K 是域 F 的扩域,$\alpha\in K$,则下列条件等价:

(1) $F(\alpha)$ 是域 F 的代数扩张;

(2) α 是 F 上的代数元;

(3) $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张.

证明　(1)⇒(2):$F(\alpha)$ 是 F 的代数扩张,而 $\alpha\in F(\alpha)$,所以 α 是 F 上的代数元;

(2)⇒(3):α 是 F 上的代数元,所以 $[F(\alpha):F]$ 为 α 在 F 上极小多项式的次数,为有限数,即 $[F(\alpha):F]<+\infty$,因而 $F(\alpha)$ 是 F 的有限扩张;

(3)⇒(1):设 $[F(\alpha):F]=n<+\infty$,$\forall\beta\in F(\alpha)$,则 $1,\beta,\cdots,\beta^n$ 是 $F(\alpha)$ 中 $n+1$ 个元素,一定线性相关,即存在不全为零的 $a_0,a_1,\cdots,a_n\in F$,使 $\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i\beta^i=0$.令 $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}\alpha_i x^i$,则有 $f(\beta)=0$,所以 β 是 F 上的代数元,

---

收稿日期:2014-12-24;**修回日期**:2015-03-06.

作者简介:郭宝勇(1989-),男,山东泰安人,硕士研究生,从事微分方程及其应用研究.

因此 $F(\alpha)$ 是域 F 的代数扩张.

由此可以得出结论:单有限扩张⇔单代数扩张.

推论 1 设域 K 是域 F 的有限扩张,则 K 一定是 F 的代数扩张.

推论 1 的证明过程与定理 1 中(3)⇒(1)的证明过程类似,只须将 $F(\alpha)$ 换为 K 即可,不再叙述.

定理 2[3] 设 E 是域 F 的扩域,K 是域 E 的扩域,即有 $F\subseteq E\subseteq K$,则当且仅当 $[K:F]<+\infty$ 时有 $[K:E]<+\infty$,$[E:F]<+\infty$,而且此时 $[K:F]=[K:E][E:F]$.

证明 设 $[K:F]=n<+\infty$,E 是 F 上线性空间 K 的子空间,所以 $[E:F]<+\infty$.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 K 对 F 的基,即 $\forall\alpha\in K$,$\exists x_i\in F\subseteq E(1\leqslant i\leqslant n)$,使 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\alpha_i$,故 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 也是 E 上线性空间 K 的一组生成元,故 $[K:E]<+\infty$.

反之,设 $[K:E]=r$,$[E:F]=s$.又在 E 上的线性空间 K 中取基 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$,在 F 上的线性空间 E 中取基 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$.设 $\alpha\in K$,则 $\exists x_i\in E(1\leqslant i\leqslant r)$,使得 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{r}x_i\alpha_i$.

又对每个 $x_i\in E$,$\exists y_{ij}\in F(1\leqslant j\leqslant s)$,使得 $x_i=\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\beta_j$,因而 $\alpha=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\alpha_i\beta_j$,故 $\{\alpha_i\beta_j\mid 1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s\}$ 是 F 上线性空间 K 的一组生成元.设 $y_{ij}\in F$,而 $\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\alpha_i\beta_j=0$,即 $\sum\limits_{i=1}^{r}(\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\beta_j)\alpha_i=0$.由 $\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\beta_j\in E$ 且 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 是 E 上线性空间 K 的基知 $\sum\limits_{j=1}^{s}y_{ij}\beta_j=0(1\leqslant i\leqslant r)$.又 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$ 是 F 上线性空间 E 的基,故 $y_{ij}=0(1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s)$.于是 $\{\alpha_i\beta_j\mid 1\leqslant i\leqslant r,1\leqslant j\leqslant s\}$ 是 F 上线性空间的一组基,于是 $[K:F]=[K:E][E:F]$.

推论 2 若 $[K:F]$ 是素数,则在 K 与 F 之间没有其他子域.

证明 若 E 为中间域,即 $F\subset E\subset K$,则 $[K:F]=[K:E][E:F]=[K:F]$.因为 $[K:F]$ 是素数,故 $[E:F]=1$ 或 $[E:F]=[K:F]$.若 $[E:F]=1$,则 $E=F$;若 $[E:F]=[K:F]$,则 $E=K$.这都导出矛盾,故推论 2 成立.

定理 3[4] 若 E 是 F 的代数扩张,K 是 E 的代数扩张,则 K 是 F 的代数扩张.

证明 只要证明 K 中每个元素都是 F 上的代数元即可.设 $\alpha\in K$,则 α 是 E 上的代数元,记 $g(x)=c_0+c_1x+\cdots+x^n$ 是 α 作为 E 上的代数元的极小多项式,其中 $c_0,c_1,\cdots,c_n-1\in E$.现作 $K^1=F(c_0,c_1,\cdots,c_{n-1})$,$F_i=F(c_0,c_1,\cdots,c_i)(1\leqslant i\leqslant n-1)$,$F_0=F(c_0)$,则 α 是 K^1 上的代数元.但由于 $c_0,c_1,\cdots,c_{n-1}$ 都是 F 上的代数元,故 $[K^{-1}:F]=[F_{n-1}:F_{n-2}][F_{n-2}:F_{n-3}]\cdots[F_0:F]<+\infty$,于是从 $F(\alpha)\subseteq K^{-1}(\alpha)$ 即可推出 $[F(\alpha):F]\leqslant[K^{-1}(\alpha):F]=[K^{-1}(\alpha):K'][K^1:F]<+\infty$.这就说明了 α 是 F 上的代数元.

2 数域扩张过程的理解

以实数域 $\mathbf{R}$ 扩充为复数域 C 的过程为例进行探讨.实数域 $\mathbf{R}$ 上的一元二次方程 $x^2+1=0$ 在实数域上无解,这很容易通过根的判别式进行判定($\Delta<0$).所以假设这个一元二次方程的根在所要扩张到的域 F 中,设这个方程的根为 α 且有 $\alpha\in F$.要使 F 成为一个域,自然地 $-\alpha$ 也要在 F 中,而且实数中的四则运算在 F 中也要成立,很容易验证 $-\alpha$ 满足 $x^2+1=0$.实数域上的不可约多项式只有两种:一种为一次多项式,另一种为二次不可约多项式.所有的三次及其以上的实系数多项式在实数域 $\mathbf{R}$ 中是可以因式分解的.而一般的一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$,如果它的判别式 $\Delta<0$,则会在求根公式中出现类似于 $\sqrt{-1}$ 的部分,而它恰好可以通过一个实数和 α 表达.这样通过构造新的集合和新的四则运算可以构造出复数域 C.

构造新集合 $C_0=\{(a,b)\mid a,b\in\mathbf{R}\}$,在 C_0 中定义加法"+"和乘法"·"运算如下:

对于任意实数对 $(a,b),(c,d)\in C_0$,令

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),(a,b)\cdot(c,b)=(ac-bd,ad+bc)$$

容易证明 $(C_0,+,\cdot)$ 是一个域.

(下转第 38 页)