doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.007

几乎无偏刘估计的不可容许性

王　艳[1], 华晶晶[2]

(1.重庆大学 数学与统计学院,重庆 401331;2.重庆电信研究院,重庆 401336)

摘　要:考虑了线性回归模型中,在 Fisherian 和 Mahalanobis 损失函数下,几乎无偏刘估计对于最小二乘估计的不可容许性;结论表明:几乎无偏刘估计在 Mahalanobis 损失函数下是不可容的;最后进行了数值模拟来表明结果.

关键词:几乎无偏刘估计;最小二乘 Mahalanobis 损失函数;Fisherian 损失函数

中图分类号:O212.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0026-05

0 引　言

考虑如下线性回归模型:

$$y = \boldsymbol{X}\beta + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I) \tag{1}$$

其中 y 是 $n\times1$ 的观测向量,$\boldsymbol{X}$ 是秩为 p 的 $n\times p$ 设计矩阵,β 是 $p\times1$ 未知参数向量,ε 是 $n\times1$ 随机误差向量,β 的普通最小二乘估计(OLSE)如下:

$$\hat{\beta} = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'y \tag{2}$$

最小二乘估计过去很长一段时间被认为是线性模型中最好的估计,存在复共线性时,最小二乘估计便失去了它的最优地位.为了克服复共线性,很多学者做了大量的努力,有一种方法是考虑有偏估计,如岭估计[1]、刘估计[2]、两参数估计[3-4].

Liu[2]提出的刘估计定义如下:

$$\hat{\beta}(d) = (\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + I)^{-1}(\boldsymbol{X}'y + d\beta) \tag{3}$$

其中 $0<d<1$ 是偏参数,$\hat{\beta}$ 是最小二乘估计. Siray 和 Sakallioglu[5]讨论了刘估计的可容性;Akdeniz 和 Kaciranlar[6]给出了几乎无偏刘估计(AULE),定义如下:

$$\hat{\beta}_{\mathrm{AULE}}(d) = [I - (1-d)^2(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + I)^{-2}]\hat{\beta} \tag{4}$$

Akdeniz 和 Kaciranlar[6]讨论了在均方误差意义下,AULE 在一定条件下优于 OLSE.

尽管在均方误差意义下,在一定条件下 AULE 优于 OLSE,但更想知道在其他准则下是否还有这一结论.此处在 Fisherian 和 Mahalanobis 损失函数下比较了这两种估计的优越性.

第 2 部分给出了线性模型的典则形式,第 3 部分在 Fisherian 和 Mahalanobis 损失函数下比较了 AULE 和 OLSE,最后进行了数值模拟和结论标注.

收稿日期:2015-01-10;**修回日期**:2015-02-20.

作者简介:王艳(1990-),女,湖北荆州人,硕士研究生,从事参数估计与变量选择研究.

1　模型和估计

考虑线性模型(1),令 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_p)$对角线上元素是 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征值,$\boldsymbol{T}$ 是由 $\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}$ 的特征向量组成的 $p\times p$ 矩阵,满足 $\boldsymbol{T}'\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{\Lambda}$,$\boldsymbol{T}\boldsymbol{T}'=\boldsymbol{T}'\boldsymbol{T}=I$,$\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p$.原来的回归模型可写成如下典则形式:

$$y=\boldsymbol{Z}\alpha+\varepsilon \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{Z}=X\boldsymbol{T}$,$\alpha=\boldsymbol{T}'\beta$.显然 $\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{\Lambda}$,最小二乘估计和几乎无偏估计写成如下形式:

$$\hat{\alpha}=(\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{Z})^{-1}\boldsymbol{Z}'y=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Z}'y \tag{6}$$

$$\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)=[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]\hat{\alpha} \tag{7}$$

设 $\boldsymbol{\Sigma}$ 是 β 的协方差矩阵,$\tilde{\beta}$ 是 β 的任一估计,$\tilde{\beta}$ 的 Fisherian 损失函数定义为

$$L_F(\tilde{\beta})=(\tilde{\beta}-\beta)'\sum{}^{-1}(\tilde{\beta}-\beta) \tag{8}$$

令 $\mathrm{Cov}(\tilde{\beta})$表示 $\tilde{\beta}$ 的协方差,则 $\tilde{\beta}$ 的 Mahalanobis 损失函数为

$$L_F(\tilde{\beta})=(\tilde{\beta}-\beta)'\sum{}^{-1}(\tilde{\beta}-\beta) \tag{9}$$

2　Fisherian 和 Mahalanobis 损失函数下的风险比较

这一部分将比较 AULE 和 OLSE 在 Fisherian 和 Mahalanobis 损失函数下的风险.

2.1　Fisherian 损失函数下的风险比较

由于 $\varepsilon\sim N(0,\sigma^2I)$,有 $\hat{\alpha}-\alpha\sim N(0,\sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1})$,即 $\boldsymbol{\Sigma}=\sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$表示 β 的协方差矩阵.

OLSE 的 Fisherian 损失函数是

$$L_F(\hat{\alpha})=\sigma^{-2}(\hat{\alpha}-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}-\alpha) \tag{10}$$

AULE 的 Fisherian 损失函数是

$$L_F(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d))=\sigma^{-2}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha) \tag{11}$$

定理 1　在 Fisherian 损失函数下,AULE 优于 OLSE,当且仅当

$$1-\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\dfrac{2}{(\lambda_i+1)^2}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\dfrac{(1+\sigma^{-2}\lambda_i\alpha_i^2)}{(\lambda_i+1)^4}}}\leqslant d\leqslant 1$$

证明　由方程(10)可得出

$$E(L_F(\hat{\alpha}))=\sigma^{-2}E\{(\hat{\alpha}-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}-\alpha)\}=p \tag{12}$$

$$\begin{aligned}E(L_F(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)))&=\sigma^{-2}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha)=\\&\sum_{i=1}^{p}\left[1-\frac{(1-d)^2}{(\lambda_i+1)^2}\right]^2+\sigma^{-2}(1-d)^4\alpha'\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-4}\alpha\end{aligned} \tag{13}$$

$$E(L_F(\hat{\alpha}))-E(L_F(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)))=p-\sum_{i=1}^{p}\left[1-\frac{(1-d)^2}{(\lambda_i+1)^2}\right]^2-\sigma^{-2}(1-d)^4\alpha'_i\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-4}\alpha=$$

$$(1-d)^2\sum_{i=1}^{p}\left[2-\frac{(1-d)^2}{(\lambda_i+1)^2}\right]\frac{1}{(\lambda_i+1)^2}-\sigma^{-2}(1-d)^2\alpha'\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-4}\alpha= \tag{14}$$

$$(1-d)^2\sum_{i=1}^{p}\frac{2(\lambda_i+1)^2-(1+\sigma^{-2}\lambda_i\alpha_i^2)(1-d)^2}{(\lambda_i+1)^4}$$

所以当 $d\geqslant 1-\dfrac{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\dfrac{2}{(\lambda_i+1)^2}}}{\sqrt{\sum_{i=1}^{p}\dfrac{(1+\sigma^{-2}\lambda_i\alpha_i^2)}{(\lambda_i+1)^4}}}$ 时,定理 1 得证.

2.2 Mahalanobis 损失函数下的风险比较

易得 $E(\hat{\alpha})=\beta$,$\mathrm{Cov}(\hat{\alpha})=\sigma^2\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$,故有

$$L_M(\hat{\alpha})=\sigma^{-2}(\hat{\alpha}-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}-\alpha) \tag{15}$$

所以

$$E\{L_M(\hat{\alpha})\}=E\{\sigma^{-2}(\hat{\alpha}-\alpha)'\boldsymbol{\Lambda}(\hat{\alpha}-\alpha)\}=p \tag{16}$$

同理可得

$$E\{\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)\}=[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]\alpha \tag{17}$$

$$\mathrm{Cov}\{\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)\}=\sigma^2[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]\boldsymbol{\Lambda}^{-1}[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}] \tag{18}$$

因此有

$$\begin{aligned}E(L_M(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)))=\sigma^{-2}E\{&(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha)'[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]^{-1}\\&\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]^{-1}(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)-\alpha)\}=\\&p+\sigma^{-2}\alpha'(1-d)^4(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]^{-1}\\&\boldsymbol{\Lambda}[\boldsymbol{I}-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}]^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+\boldsymbol{I})^{-2}\alpha\end{aligned} \tag{19}$$

由方程(16)、(19),得到

$$\begin{aligned}E\{L_M(\hat{\alpha})\}-E(L_F(\hat{\alpha}_{\mathrm{AULE}}(d)))=-\sigma^{-2}\alpha'(1-d)^4(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-2}[I-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-2}]^{-1}\\\boldsymbol{\Lambda}[I-(1-d)^2(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-2}]^{-1}(\boldsymbol{\Lambda}+I)^{-2}\alpha\leqslant 0\end{aligned} \tag{20}$$

因此由如下定理 2.

定理 2 在 Mahalanobis 损失函数下 AULE 对于 OLSE 是不可容的.

3 数值模拟

为了进一步表明理论结果,在这部分进行一个数值模拟.根据 McDonald 和 Galarneau[7] 和 Liu[8],解释变量如下:

$$x_{ij}=(1-\gamma^2)^{\frac{1}{2}}z_{ij}+\gamma z_{i(p+1)},i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,p \tag{21}$$

其中 z_{ij} 和 $z_{i(p+1)}$ 是独立标准正态随机变量.给定 γ,两解释变量之间的相关系数是 γ^2.考虑 $n=25,p=4,\gamma=0.8$,0.9,0.99,观测变量如下产生(式(22)):

$$y_i=\beta_1x_{i1}+\beta_2x_{i2}+\beta_3x_{i3}+\beta_4x_{i4}+\varepsilon_i,\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2) \tag{22}$$

表 1~表 6 给出了估计值的 Fisherian 损失和 Mahalanobis 损失.

表 1　$\gamma=0.8,\kappa=10.391\ 4$,OLSE 和 AULE 的 Fisherian 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	6.466 2	4.201 5	4.071 4	4.015	3.998 7	3.998 5	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	4.894 8	4.051 8	4.010 1	3.995 6	3.994 8	3.998 2	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	4.371 0	4.001 9	3.990 0	3.989 1	3.993 6	3.998 1	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	4.109 1	3.977 0	3.977 0	3.985 9	3.992 9	3.998 1	4.000 0

表 2　$\gamma=0.9,\kappa=48.495\ 1$,OLSE 和 AULE 的 Fisherian 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	11.649 7	4.645 1	4.236 3	4.055 7	4.000 3	3.996 4	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	6.837 6	4.186 6	4.048 6	3.996 3	3.988 5	3.995 7	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	5.233 5	4.033 8	3.986 0	3.976 5	3.984 6	3.995 4	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	4.431 5	3.957 4	3.954 7	3.966 6	3.982 6	3.995 3	4.000 0

表 3　$\gamma=0.99,\kappa=469.315\ 4$,OLSE 和 AULE 的 Fisherian 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	34.898 9	6.366 7	4.777 2	4.114 5	3.948 5	3.971 8	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	15.134 0	4.483 9	4.006 0	3.870 5	3.900 3	3.968 7	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	8.545 7	3.856 3	3.748 9	3.789 2	3.884 2	3.967 7	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	5.251 5	3.542 5	3.620 4	3.748 5	3.876 2	3.967 2	4.000 0

表 4　$\gamma=0.8,\kappa=10.391\ 4$,OLSE 和 AULE 的 Mahalanobis 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	6.912 4	4.257 6	4.104 3	4.032 7	4.006 4	4.000 4	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	5.165 0	4.103 0	4.041 7	4.013 1	4.002 6	4.000 2	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	4.582 5	4.051 5	4.020 9	4.006 5	4.001 3	4.000 1	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	4.291 2	4.025 8	4.010 4	4.003 3	4.000 6	4.000 0	4.000 0

表 5　$\gamma=0.9,\kappa=48.495\ 1$,OLSE 和 AULE 的 Mahalanobis 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	14.356 8	4.822 9	4.328 0	4.101 7	4.019 8	4.001 2	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	8.142 7	4.329 1	4.131 2	4.040 7	4.007 9	4.000 5	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	6.071 4	4.164 6	4.065 6	4.020 3	4.004 0	4.000 2	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	5.035 7	4.082 3	4.032 8	4.010 2	4.002 0	4.000 1	4.000 0

表 6 $\gamma=0.99,\kappa=469.315\ 4$,OLSE 和 AULE 的 Mahalanobis 损失

	$\hat{\beta}$	$d=0.1$	$d=0.5$	$d=0.6$	$d=0.77$	$d=0.8$	$d=0.9$	$d=0.1$
$\sigma^2=0.1$	4.000 0	147.731 5	8.371 8	5.577 5	4.455 0	4.084 4	4.005 1	4.000 0
$\sigma^2=0.25$	4.000 0	61.492 6	5.748 7	4.631 0	4.182 0	4.033 7	4.002 0	4.000 0
$\sigma^2=0.5$	4.000 0	32.746 3	4.874 4	4.315 5	4.091 0	4.016 9	4.001 0	4.000 0
$\sigma^2=1$	4.000 0	18.373 2	4.437 2	4.157 8	4.045 5	4.008 4	4.000 5	4.000 0

从表 1~表 6 所给出的模拟结果来看,随着复共线性的增加,AULE 和 OLSE 的损失函数增加;随着 σ^2 的增加;AULE 的 Fisherian 损失和 Mahalanobis 损失减少.由表 4~表 6,OLSE 总是优于 AULE,与定理 2 相吻合.

参考文献:

[1] HOERL A E,KENNARD R W.Ridge Regression:Biased Estimation for Non-orthogonal Problems[J].Technometrics,1970(12):55-67

[2] LIU K.A New Class of Biased Estimate in Linear Regression[J].CommunStat Theory Methods,1993(22):393-402

[3] ÖZKALE M R,KAIRANLAR S.The Restricted and Unrestricted Two-Parameter Estimators[J].CommunStat Theory Methods,2007(32):1009-1020

[4] 汪国平.线性模型中的一类新的 k-d 类估计[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2013,30(7):12-15

[5] IRAY G Ü, SAKALLOĜLU. Inadmissibility of the Liu Estimator to the Ordinary Least Squares Estimator[J]. Advances and Applications in Statistics,2010(19):21-32

[6] AKDENIZ F,KAÇIRANLAR S.On the Almost Unbiased Generalized Liu Estimator and Unbiased Estimation of the Bias and MSE[J].Commun Stat Theory Methods,1995(24):1789-1797

[7] MCDONALD M C,GALARNEAU D I.A Monte Carlo Evaluation of Ridge-type Estimators[J].Journal of the American Statistical Association,1975(70):407-416

[8] LIU K.Using Liu-Type Estimator to Combat Collinearity[J].CommunStat Theory Methods,2003(32):1009-1012

Inadmissibility of the Almost Unbiased Liu Estimator

WANG Yan[1], HUA Jing-jing[2]

(1.School of Mathematics and Statistics,Chongqing Universtity,Chongqing 401331,China;

2.West Institute,China Academy of Telecommunication Research,Chongqing 401336,China)

Abstract: This paper considers the admissibility of the almost unbiased Liu estimator to the ordinary least squares estimator of linear regression model in the Fisherian and Mahalanobis loss functions. The results show that the almost unbiased Liu estimator is inadmissible under Mahalanobis loss function. Finally, a simulation study is given to show the theoretical results.

Key words: almost unbiased Liu estimator; ordinary least squares estimator; Mahalanobis loss function; Fisherian loss function