第 32 卷第 9 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 9 月
Vol. 32 NO.9 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Sep.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0009.006

初等变换在向量组的线性相关性中的应用*

张平平, 徐阳栋

(重庆邮电大学 理学院,重庆 400065)

摘　要:线性方程组的解及向量组的线性相关性是线性代数的核心内容,而初等变换是研究它们的最有力的工具,因此应用好这一工具对学习线性代数非常有帮助;用“提问—总结—举例”的方式给学生阐述了初等变换在向量组的线性相关性中的应用.

关键词:初等变换;向量组;最大线性无关组;线性相关

中图分类号:O151.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)09-0023-03

为了便于叙述,给出下面已熟悉的初等变换的性质作为引理.

引理 1[1]　设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $m\times n$ 矩阵,对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等行变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的左边乘以相应的 m 阶初等矩阵;对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次初等列变换,相当于在 $\boldsymbol{A}$ 的右边乘以相应的 n 阶初等矩阵.

引理 2[1]　方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是存在有限个初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1,\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$,使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2,\cdots,\boldsymbol{P}_l$.

引理 3[1]　对于 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,可经过一系列的初等行变换化成行最简形矩阵.

下面通过“提问题—解决问题—总结—举例”的方式给出线性变换在向量组的线性相关性中的应用.

若矩阵 $\boldsymbol{P}$ 是一 m 阶可逆矩阵,矩阵 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,$\boldsymbol{B}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$ 均为 $m\times n$ 矩阵,α_j,$\beta_j(j=1,2,\cdots,n)$ 分别是它们的列向量,且满足 $\boldsymbol{PA}=\boldsymbol{B}$.

问题 1　试证向量组 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 是向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 的最大线性无关组的充分必要条件是向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的最大线性无关组.

证明　只证充分性,必要性可类似地证明.由题意得

$$\beta_i=\boldsymbol{P}\alpha_i,i=1,2,\cdots,n \tag{1}$$

i) 首先要证向量组 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$ 线性无关.令

$$k_1\beta_{i_1}+k_2\beta_{i_2}+\cdots+k_r\beta_{i_r}=0$$

把式(1)代入得

$$\boldsymbol{P}(k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r})=0$$

由 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵,左右两边同时乘以 $\boldsymbol{P}^{-1}$ 得,

$$k_1\alpha_{i_1}+k_2\alpha_{i_2}+\cdots+k_r\alpha_{i_r}=0$$

收稿日期:2015-01-17;**修回日期**:2015-03-10.

* **基金项目**:国家数学天元基金(11426055).

作者简介:张平平(1985-),女,江西上饶人,讲师,博士研究生,从事数值线性代数研究.

再由假设向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是最大无关组,知 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性无关,从而有

$$k_1=k_2=\cdots=k_r=0$$

于是向量组 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性无关.

ii) 其次要证 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$可由向量组 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性表出.

由向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的最大线性无关组,知 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$可由向量组 α_{i_1}, $\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$线性表出,即存在数 $k_{i_1},k_{i_2},\cdots,k_{i_r}$使得

$$\alpha_i=k_{i_1}\alpha_{i_1}+k_{i_2}\alpha_{i_2}+\cdots+k_{i_r}\alpha_{i_r},i=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

对式(2)左右两边同时乘以矩阵 $\boldsymbol{P}$,并结合式(1),得

$$\beta_i=k_{i_1}\beta_{i_1}+k_{i_2}\beta_{i_2}+\cdots+k_{i_r}\beta_{i_r},i=1,2,\cdots,n$$

即证 $\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$可由向量组 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_r}$线性表出.

由 i),ii)知充分性得证.

由问题 1 知,若在向量组 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$ 中很容易找到其最大无关组,则就可以得到向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 相应的一个最大线性无关组.知道行最简形矩阵的非零行的第一个非零元素所在的列向量就是该矩阵的列向量所组成的向量组的一个最大无关组.同时由问题的证明过程知道,$\beta_i(i=1,2,\cdots,n)$由其最大线性无关组线性表示的表出系数与 $\alpha_i(i=1,2,\cdots,n)$由其相应的最大线性无关组线性表示的表出系数相同;而行最简形矩阵的列向量很容易写出由其非零行的第一个非零元素所在的列向量的线性表示的表出系数.再根据引理 1,2 及 3 就有找一给定向量组的最大线性无关组并把其余的向量用该最大线性无关组线性表示的方法,并以命题的方式总结如下:

命题 1 将矩阵 $\boldsymbol{A}=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$进行一系列的初等行变换使其化成行最简形矩阵 $\boldsymbol{B}=[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$,且设该最简形矩阵中的非零行的第一个非零元素所在的列标依次为 $i_1,i_2,\cdots,i_r$,且有 $\beta_i=k_{i_1}\beta_{i_1}+k_{i_2}\beta_{i_2}+\cdots+k_{i_r}\beta_{i_r},i=1,2,\cdots,n$,则向量组 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$就是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 的一最大线性无关组,并且

$$\alpha_i=k_{i_1}\alpha_{i_1}+k_{i_2}\alpha_{i_2}+\cdots+k_{i_r}\alpha_{i_r},i=1,2,\cdots,n$$

从问题中提炼出方法,然后再归纳总结,这是数学当中重要的研究手段[2].

例 1 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1&1&2\\1&1&-2&1&4\\4&-6&2&-2&4\\3&6&-9&7&9\end{pmatrix}$$

求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组的一个最大线性无关组,并把不属于最大线性无关组的列向量用最大线性无关组线性表示.

解 对矩阵 A 施行一系列的初等行变换变为行最简形矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0&-1&0&4\\0&1&-1&0&3\\0&0&0&1&-3\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

显然 $\boldsymbol{B}$ 中的非零行的第一个非零元素所在的列的列标分别为 1,2,4,由命题 1 知道

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

为该列向量组的最大线性无关组.在 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组中,很容易得到如下线性表示式

$$\beta_3 = -\beta_1 - \beta_2$$

$$\beta_5 = 4\beta_1 + 3\beta_2 - 3\beta_4$$

由命题知道

$$\alpha_3 = -\alpha_1 - \alpha_2$$

$$\alpha_5 = 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 3\alpha_4$$

尽管随着计算机的发展,判断一向量组的线性相关性及线性表示问题很容易在计算机上实现[3],然而这些是要在相应理论研究的基础上实现的.因此向量组的线性相关性及线性表示问题的理论研究还是非常有意义的.

参考文献:

[1] 同济大学数学系.工程数学线性代数[M].5 版.北京:高等教育出版社, 2007

[2] 曾静,程珍珍,耿立刚.定积分定义在证明和求极限中的应用[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2013,30(2):18-20

[3] 孙祥凯,张付臣.例析线性规划教学中解的判定准则[J].科技文汇,2014 (280):47-49

The Application of Elementary Transformation in the Linear Dependence of Vector Sets

ZHANG Ping-ping, XU Yang-dong

(School of Science, Chongqing University of Posts and Telecommunications, Chongqing 400065, China)

Abstract: The solution to system of linear equations and the linear dependence of vector sets are the core content in linear algebra, and elementary transformation is a powerful tool to research them. Hence, it is very helpful to master the tool for learning linear algebra. This paper states the application of elementary transformation in the linear dependence of vector sets in the way of "asking question-summing up-taking example".

Key words: elementary transformation; vector sets; maximal linearly independent subset; linearly dependence