第 32 卷第 8 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 8 月
Vol. 32 NO.8 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Aug.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0008.015

多层复合油藏渗流模型解的相似结构*

王 强, 李顺初**, 胡 明
(西华大学 应用数学研究所,成都 610039)

摘 要:考虑井筒储集和表皮效应的影响,在不同外边界(无穷大、封闭、定压)的条件下,建立多层复合油藏的数学模型;经过 Laplace 变换,解出多层复合油藏在相应的 Laplace 空间中的精确解;经过分析,得到多层复合油藏在内外区储层压力分布的 Laplace 空间解的相似结构;解的相似结构对于分析解的内在规律、编制试井分析软件和研究油气藏渗流规律有着深远的影响。

关键词:多层复合油藏;井筒储集;表皮效应;相似结构;相似核函数

中图分类号:O29;TE3 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)08-0071-05

由于不同地质年代形成不同的沉积岩,很多油藏具有多层的特性[1]。对于多层油藏已经有文献进行了研究,文献[2]应用 Laplace 变换的方法研究了无窜流的多层油藏中压力动态分布,文献[3]考虑了井筒储集和表皮效应的影响,计算了有拟稳态窜流的层状油藏的压力;近些年,对于多层油藏渗流模型解也做了一些探究[4,5],但在实际复杂的油田中,简单的多层油藏模型再不能真实反映井下的情况,需要建立复杂的多层复合油藏渗流模型来进行试井分析,文献[6]对影响多层复合油藏渗流模型井底压力动态的因素已经进行了研究。

现系统的对多层复合油藏渗流模型的解进行分析。在考虑井筒储集、表皮效应的影响,以及在不同外边界的条件下建立了多层复合油藏数学模型,经过 Laplace 变换[7],求解出多层复合油藏数学模型在不同外边界条件下的表达式;通过构造多层复合油藏数学模型解在不同外边界条件下的相似核函数,进而得到解的统一表达形式,即相似结构式。这对于试井分析软件的编制提供了很大的便利,同时对油气藏渗流理论的研究也是一大进步,并且进一步完善和发展了相似构造理论[8-12]。

1 多层复合油藏的数学模型

假设在 N 层复合油藏中满足达西平面径向流,各层等厚水平,流体为单相弱可压缩液体,且层与层之间无窜流,井筒半径为 r_w(第 j 层的井半径为 r_{wj}, $r_w=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} r_{wj}$);内区边界半径为 αr_{wj}($\alpha>1$),外区边界半径为 R_j($R_j>\alpha r_{wj}$);各层中初始压力为 p_{oj}($j=1,2,\cdots,N$);并以定产量 q($q=\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} q_j$)生产;可以建立如下的渗流数学模型。

收稿日期:2015-01-05;**修回日期**:2015-02-16.
*****基金项目**:四川省教育厅自然科学重点项目资助(12ZA164).
作者简介:王强(1993-),男,山西原平人,硕士研究生,从事微分方程及其应用研究.
****通讯作者**:李顺初(1963-),男,湖北浠水人,教授,从事微分方程和渗流力学及其应用研究.E-mail:lishunchu@163.com.

渗流基本方程：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial P_{j1}}{\partial r}\right)=\dfrac{1}{\eta_{j1}}\dfrac{\partial P_{j1}}{\partial t},r_{wj}<r<\alpha r_{wj},t>0\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial P_{j2}}{\partial r}\right)=\dfrac{1}{\eta_{j2}}\dfrac{\partial P_{j2}}{\partial t},r>\alpha r_{wj},t>0\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{1}$$

初始条件：

$$\begin{cases}P_{j1}(r,0)=0\\ P_{j2}(r,0)=0\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{2}$$

内边界条件：

$$\begin{cases}P_w(t)=\left[P_{j1}-S_j r\dfrac{\partial P_{j1}}{\partial r}\right]\Big|_{r=r_{wj}}\\ 2\pi\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}\left(r\dfrac{\partial P_{j1}}{\partial r}\right)\Big|_{r=r_{wj}}=-\left[Bq-C\dfrac{\mathrm{d}P_w}{\mathrm{d}t}\right]\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{3}$$

交界面条件：

$$\begin{cases}P_{j1}(\alpha r_{wj},t)=P_{j2}(\alpha r_{wj},t)\\ \dfrac{\partial P_{j1}}{\partial r}\Big|_{r=\alpha r_{wj}}=\dfrac{1}{\lambda_{j12}}\dfrac{\partial P_{j2}}{\partial r}\Big|_{r=\alpha r_{wj}}\end{cases}\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{4}$$

外边界条件外边界无穷大时：

$$P_{j2}(\infty,t)=0\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{5}$$

外边界封闭时：

$$\frac{\partial P_{j2}}{\partial r}\Big|_{r=R_j}=0\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{6}$$

外边界定压时：

$$P_{j2}(R_j,t)=0\quad(j=1,2,\cdots,N)\tag{7}$$

其中：$P_{jm}=p_{oj}-p_{jm}$；$\eta_{jm}=\dfrac{k_{jm}}{\varphi_{jm}\mu_{jm}C_{tjm}}$；$\lambda_{j12}=\dfrac{\left(\dfrac{k}{\mu}\right)_{j1}}{\left(\dfrac{k}{\mu}\right)_{j2}}$；$\varepsilon_{j1}=\dfrac{k_{j1}h_{j1}}{\mu_{j1}}$；$(j=1,2,\cdots,N)$ $(m=1,2)$；式中 $m=1$ 表示内区；$m=2$表示外区。

2 求解多层复合油藏数学模型的相似结构

对上述数学模型取关于 t 的 Laplace 变换，令：

$$\overline{P}_{jk}(r,z)=\int_0^\infty e^{-zt}P_{jk}(r,t)\,\mathrm{d}t,(k=1,2)$$

$$\overline{P}_w(z)=\int_0^\infty e^{-zt}P_w(t)\,\mathrm{d}t$$

则上述偏微分方程的定解问题式(1)-(7)转化成如下 Laplace 空间中的常微分方程边值问题。

定解方程：

$$\begin{cases}\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j1}}{\mathrm{d}r}\right)=\dfrac{z}{\eta_{j1}}\overline{P}_{j1}(r_{wj}<r<\alpha r_{wj},t>0)\\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j2}}{\mathrm{d}r}\right)=\dfrac{z}{\eta_{j2}}\overline{P}_{j2}(r>\alpha r_{wj},t>0)\end{cases}\tag{8}$$

内边界条件:

$$\begin{cases}\overline{P}_w(z)=\left[\overline{P}_{j1}-S_j r\dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j1}}{\mathrm{d}r}\right]\Big|_{r=r_{wj}}\\ 2\pi\displaystyle\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}\left(r\dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j1}}{\mathrm{d}r}\right)\Big|_{r=r_{wj}}=-\left[\dfrac{Bq}{z}-Cz\overline{P}_w\right]\end{cases}\tag{9}$$

衔接条件:

$$\begin{cases}\overline{P}_{j1}(\alpha r_{wj},z)=\overline{P}_{j2}(\alpha r_{wj},z)\\ \dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j1}}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=\alpha r_{wj}}=\dfrac{1}{\lambda_{j12}}\dfrac{\mathrm{d}\overline{P}_{j2}}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=\alpha r_{wj}}\end{cases}\tag{10}$$

外边界条件

无穷大外边界时:

$$\overline{P}_{j2}(\infty,z)=0\tag{11}$$

外边界封闭:

$$\frac{\mathrm{d}\overline{P}_{j2}}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R_j}=0\tag{12}$$

外边界定压:

$$\overline{P}_{j2}(R_j,z)=0\tag{13}$$

经过变量替换后,定解方程式(8)转化为 0 阶变型的 Bessel 方程。它的通解[13]可由下式给出:

$$\overline{P}_{j1}=A_{j1}K_0\left(r\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)+B_{j1}I_0\left(r\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)\tag{14}$$

$$\overline{P}_{j2}=A_{j2}K_0\left(r\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)+B_{j2}I_0\left(r\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)\tag{15}$$

其中:$I_h(\cdot)$、$K_h(\cdot)$分别为 h 阶的第一类、第二类变型的 Bessel 函数;常数 A_{j1}、B_{j1}、A_{j2}、B_{j2}由条件式(9)-(13)确定。

将式(14)代入式(9)中,得:

$$\overline{P}_w(z)=\left[K_0\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)+S_j r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}K_1\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)\right]A_{j1}+\left[I_0\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)-S_j r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}I_1\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)\right]B_{j1}\tag{16}$$

$$2\pi\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}\left[r_{wj}\left(-\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}K_1\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)\right)A_{j1}+r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}I_1\left(r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)B_{j1}\right]=-\frac{Bq}{z}+Cz\overline{P}\tag{17}$$

将式(14)、(15)代入式(10)中,得:

$$K_0\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)A_{j1}+I_0\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)B_{j1}-K_0\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)A_{j2}-I_0\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)B_{j2}=0\tag{18}$$

$$\sqrt{\frac{1}{\eta_{j1}}}K_1\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)A_{j1}-\sqrt{\frac{1}{\eta_{j1}}}I_1\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)B_{j1}-$$

$$\frac{1}{\lambda_{j12}}\sqrt{\frac{1}{\eta_{j2}}}K_1\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)A_{j2}+\frac{1}{\lambda_{j12}}\sqrt{\frac{1}{\eta_{j2}}}I_1\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)B_{j2}=0 \tag{19}$$

当外边界无穷大时,由式(11)、(15)得:

$$B_{j2}=0 \tag{20a}$$

当外边界封闭时,由式(12)、(15)得:

$$K_1\left(R_j\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)A_{j2}-I_1\left(R_j\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)B_{j2}=0 \tag{20b}$$

当外边界定压时,由式(13)、(15)得:

$$K_0\left(R_j\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)A_{j2}+I_0\left(R_j\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)B_{j2}=0 \tag{20c}$$

令:

$$\psi_{m,n}(\alpha,\beta,y)=K_m(\alpha y)I_n(\beta y)+(-1)^{m-n+1}I_m(\alpha y)K_n(\beta y)$$

定义相似核函数 $\psi(r,z)$ 如下:

$$\psi(r,z)=\frac{\frac{1}{\lambda_{j12}}\psi_{0,0}\left(r,\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)+\psi^*(\alpha r_{wj},z)\psi_{0,1}\left(r,\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)}{\frac{1}{\lambda_{j12}}\psi_{1,0}\left(r_{wj},\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)+\psi^*(\alpha r_{wj},z)\psi_{1,1}\left(r_{wj},\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)}$$

其中,当外边界无穷大时:

$$\psi^*(r,z)=\frac{K_0\left(r\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}{\sqrt{\frac{\eta_{j1}}{\eta_{j2}}}K_1\left(\alpha r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}$$

当外边界封闭时:

$$\psi^*(r,z)=\frac{\psi_{0,1}\left(r,R_j,\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}{\sqrt{\frac{\eta_{j1}}{\eta_{j2}}}\psi_{1,1}\left(\alpha r_{wj},R_j,\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}$$

当外边界定压时:

$$\psi^*(r,z)=\frac{\psi_{0,0}\left(r,R_j,\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}{\sqrt{\frac{\eta_{j1}}{\eta_{j2}}}\psi_{1,0}\left(\alpha r_{wj},R_j,\sqrt{\frac{z}{\eta_{j2}}}\right)}$$

求解方程组式(16)-(20),可以得出系数 A_{j1}、B_{j1}、A_{j2}、B_{j2} 的值,并且代入式(14)、(15)中,得到不同外边界条件下的具有相似结构的储层内压力的 Laplace 空间解的统一表达形式。

当 $r_{wj}<r<\alpha r_{wj}$ 时,内区中的压力分布 Laplace 空间解为

$$\bar{P}_{j1}(r,z)=\frac{Bq}{z}\cdot\frac{1}{Cz+2\pi\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\frac{1}{S_jr_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}+\psi(r_{wj},z)}}\cdot\frac{1}{S_jr_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}+\psi(r_{wj},z)}\cdot\psi(r,z) \tag{21}$$

当 $r>\alpha r_{wj}$ 时,外区中压力分布的 Laplace 空间解为

$$\overline{P}_{j2}(r,z)=\frac{Bq}{z}\cdot\frac{1}{Cz+2\pi\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\frac{1}{S_jr_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}+\psi(r_{wj},z)}}\cdot\frac{1}{S_jr_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}+\psi(r_{wj},z)}\cdot$$

$$\frac{\psi_{0,1}\left(\alpha r_{wj},\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)}{\frac{1}{\lambda_{j12}}\psi_{1,0}\left(r_{wj},\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)+\psi^{*}(\alpha r_{wj},z)\psi_{1,1}\left(r_{wj},\alpha r_{wj},\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\right)}\cdot\psi^{*}(r,z)\tag{22}$$

将式(21)代入式(9)中的第一式中,就可以得到井底压力的 Laplace 空间解,而对于不同的外边界条件,同样具有统一的表达形式:

$$\overline{P}_{w}(z)=\frac{Bq}{z}\cdot\frac{1}{Cz+2\pi\sum_{j=1}^{N}\varepsilon_{j1}r_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}\frac{1}{S_jr_{wj}\sqrt{\frac{z}{\eta_{j1}}}+\psi(r_{wj},z)}}$$

特别地,当不考虑井筒储集时,则 $C=0$;当不考虑表皮效应时,则 $S_j=0$。

3　结论与认识

(1) 考虑井筒储集和表皮效应建立的多层复合油藏数学模型的解在不同的外边界条件下,内区和外区中的压力分布的 Laplace 空间解都具有统一的表达形式,在试井分析中体现了很大的优越性。

(2) 从所得到的多层复合油藏数学模型解的相似结构式中,很容易分析出井筒储集、表皮效应、不同的外边界条件对储层压力和井底压力的影响,所以解的相似结构对于石油工作者在油气田开发时提供了极大地帮助。

(3) 对于求出的压力分布的 Laplace 空间解的相似结构式(21)、(22),可以发现当外边界条件发生变化时,只需要改变相似核函数就可以得到多层复合油藏渗流模型的解,并且得到的解的相似结构与其通解的功能相比,更具有实用性。

符号说明:

p_{oj}为各层中初始压力(MPa);r_w 为井半径(m);r_{wj}为第 j 层储层井半径(m);p_j 为第 j 层储层在时刻 t 时的压力(MPa);P_j 为第 j 层储层压力降(MPa);S_j 为第 j 层储层的表皮因子(无因次);C 为井筒储集系数(m^3/MPa);B 为原油体积系数(m^3/m^3);k_j 为第 j 层储层渗透率(μm^2);C_{tj}为第 j 层储层的综合压缩系数(1/MPa);φ_j 为第 j 层储层孔隙度(%);μ_j 为第 j 层储层流体粘度(MPa·s);h_j 为第 j 层储层厚度(m);q_j 为第 j 层储层油井产量(m^3/d);q 为油井产量(m^3/d);R_j 为第 j 层储层外边界半径(m);R 为外边界半径(m);t 为时间(h);Z 为 Laplace 空间变量.

参考文献:

[1] 孔祥言.高等渗流力学[M].合肥:中国科学技术大学出版社,2010
[2] 黄炳光,李顺初,李晓平.无窜流的多层油藏中压力动态分布研究[J].大庆石油地质与开发,2003,22(3):45-46
[3] BOURDET D.Pressure Behavior of Layered Resevoirs with Crossflow[J].Paper SPE,1985,13:629-633
[4] 李顺初,张普斋,黄炳光.多层油藏压力分布的一般解[J].西南石油大学学报,2002,24(4):28-30
[5] 任俊杰,郭平,王德龙.考虑二次梯度项影响的多层油藏渗流模型研究[J].水动力学研究与进展,2014,29(1):76-82
[6] 杨志刚,陈玉祥,王霞.考虑外边界影响的多层复合油藏试井解释数学模型[J].石油化工应用,2011,30(3):16-19
[7] 李顺初,黄炳光.Laplace 变换与 Bessel 函数及试井分析理论基础[M].北京:石油工业出版社,2000

(下转第 92 页)