doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.017

行列式的计算方法解析

杨 关 玲
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:行列式求解在各个领域中有非常广泛的运用.通过分析一些具体实例,介绍了 7 种行列式的计算常用方法,包括 n 阶行列式、抽象行列式、行列式的展开定理以及代数余子式的应用,为今后学者们求解行列式提供了一些可行的方法.

关键词:行列式;展开式;上三角;计算方法

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)07-0068-07

当前,在教学领域中,无论是高等数学领域里的高深理论,还是现实生活里的实际问题,都或多或少地与行列式有着直接或间接的联系.行列式的计算是一个重要的问题,也是一个很麻烦的问题.n 级行列式一共有 $n!$ 项,计算它有 $n!(n-1)$ 个乘法.这是因为 n 级行列式的每一项都取自不同行不同列的 n 个元素的乘积,若把每一项都按 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 排列,则对于 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 有 $n!$ 种排列,故 n 级行列式共有 $n!$ 项.每一项都有 n 个数相乘,即每一项有 $n-1$ 个乘法,共有 $n!(n-1)$ 个乘法.二阶行列式有 $2!$ 项,三阶行列式有 $3!$ 项,当 n 较大时,$n!$ 是一个相当大的数字,直接从定义来计算行列式几乎是不可能的事.因此,可以利用行列式的性质简化行列式的计算.

行列式计算方法很多,而且一个行列式求解问题往往同时要用如上列举出的一个或几个方法才能解决.所以,在学习的过程中要学会观察、探索,并有针对性总结.这里归纳介绍几种具有典型特征的行列式解法.

1 关于 n 阶行列式的计算方法[1-3]

1.1 直接利用定义计算(适用于行列式中有较多 0 的情况)

在引进行列式的定义之前,为了更加容易理解行列式的定义,首先介绍排列和逆序的概念.

(1) n 级排列:由 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 n 级排列.

(2) 在一个排列中,如果一对数的前后位置与大小顺序相反,即前面的数大于后面的数,那么它们就称为一个逆序,一个排列中逆序的总数称为这个排列的逆序数.

(3) 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

在做好这些工作之后,引入行列式的定义:

n 级行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ 等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和,这里

收稿日期:2014-11-28;**修回日期**:2014-12-30.

作者简介:杨关玲(1988-),女,重庆巫溪人,硕士研究生,从事复杂网络传播动力学研究.

$j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是 1,2,…,n 的一个排列,每一项都按下列规则带有符号:当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是偶排列时带正号,当 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 是奇排列时带负号.这一定义可以写成 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$,这里 $\sum\limits_{j_1,j_2,\cdots,j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

当行列式中的元素有较多的 0,并且行列式的元素比较简单时,不需要变形就可以直接利用行列式的定义计算出行列式的值.

1.2　利用行列式的性质,化为上(下)三角行列式计算

运用行列式的性质是计算行列式的一个重要途径,大多数行列式的计算都依赖于行列式的性质,将行列式化成上三角(下三角或反三角)形式,再根据行列式的定义来计算行列式.

特征:第 1 行、列及主对角线外元素均为 0(或可化为这种形式)的行列式(称 K 型行列式),可以化为上三角行列式进行计算.

例 1　计算行列式 $D_n = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 & x & a_3 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$,其中 $x \neq a_i (i=1,2,\cdots,n)$.

解

$$D_n = \begin{vmatrix} x & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_1 - x & x - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 - x & 0 & x - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 - x & 0 & 0 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix} (\text{K 型}) =$$

$$\begin{vmatrix} x - \sum\limits_{i=2}^{n} \dfrac{a_1 - x}{x - a_i} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ 0 & x - a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & x - a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x - a_n \end{vmatrix} (\text{上三角}) =$$

$$\left(x - \sum_{i=2}^{n} \frac{a_1 - x}{x - a_i} a_i\right) \prod_{i=2}^{n} (x - a_i)$$

1.3　利用行(列)展开定理进行降阶,或作拉普拉斯展开

拉普拉斯定理　设在行列式 D 中任意取定了 $k(1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 个行,由这 k 行元素所组成的一切 k 级子式与它们的代数余子式的乘积的和等于行列式 D.

例 2 在行列式

$$D=\begin{vmatrix}2&3&1&5\\0&-1&4&1\\2&0&1&6\\0&1&3&2\end{vmatrix}$$

中取定第 1,2 行,得到 6 个子式:

$$M_1=\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix},M_2=\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix},M_3=\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix},M_4=\begin{vmatrix}3&1\\-1&4\end{vmatrix},M_5=\begin{vmatrix}3&5\\-1&1\end{vmatrix},M_6=\begin{vmatrix}1&5\\4&1\end{vmatrix}$$

它们对应的代数余子式为

$$A_1=(-1)^{(1+2)+(1+2)}M'_1=M'_1,A_2=(-1)^{(1+2)+(1+3)}M'_2=-M'_2$$
$$A_3=(-1)^{(1+2)+(1+4)}M'_3=M'_3,A_4=(-1)^{(1+2)+(2+3)}M'_4=M'_4$$
$$A_5=(-1)^{(1+2)+(2+4)}M'_5=-M'_5,A_6=(-1)^{(1+2)+(3+4)}M'_6=M'_6$$

根据拉普拉斯定理

$$D=M_1A_1+M_2A_2+\cdots+M_6A_6=$$
$$\begin{vmatrix}2&3\\0&-1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}1&6\\3&2\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2&1\\0&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&6\\1&2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}2&5\\0&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3&1\\-1&4\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&6\\0&2\end{vmatrix}-$$
$$\begin{vmatrix}3&5\\-1&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&1\\0&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&5\\4&1\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}2&0\\0&1\end{vmatrix}=44$$

从这个例子来看,利用拉普拉斯定理来计算行列式一般是不方便的.这个定理主要是在理论方面应用.

1.4 利用递推关系,或用数学归纳法证明

无论是初等数学,还是高等数学,递推公式都有着非常广泛的运用.适用递推法计算行列式有以下规律:按照行列式的某一行(列)展开,会产生阶数比原行列式低但却与原行列式有着相同类型的新的行列式,运用递推法逐层降阶,最终将计算出原行列式的值.

例 3 计算 n 阶行列式

$$D_n=\begin{vmatrix}5&3&0&\cdots&0&0\\2&5&3&\cdots&0&0\\0&2&5&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&5&3\\0&0&0&\cdots&2&5\end{vmatrix}$$

解 按第 1 行展开得 $D_n=5D_{n-1}-6D_{n-2}$;对应特征方程 $x^2-5x+6=0$,解之得 2 根 $x_1=2,x_2=3$;令 $D_n=A\cdot 2^n+B\cdot 3^n$.则

$$5=2A+3B,n=1 \tag{1}$$
$$19=4A+9B,n=2 \tag{2}$$

由式(1)(2)得 $A=-2,B=3$,所以 $D_n=-2^{n+1}+3^{n+1}$.

1.5 利用范德蒙行列式(或其他已知行列式)

这一方法往往要结合行列式的乘法规则.形如 $d=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\a_1&a_2&a_3&\cdots&a_n\\a_1^2&a_2^2&a_3^2&\cdots&a_n^2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots\\a_1^{n-1}&a_2^{n-1}&a_3^{n-1}&\cdots&a_n^{n-1}\end{vmatrix}$ 称为 n 级范德蒙德

(Vandermonde)行列式.

对任意的 $n(n\geqslant 2)$,n 级范德蒙德行列式等于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数的所有可能的差 $a_i-a_j(1\leqslant j<i\leqslant n)$ 的乘积,即 $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(a_i-a_j)$.值得注意的是范德蒙德行列式为零的充分必要条件是 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 这 n 个数中至少有两个相等.

例 4 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \cdots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_n^2(x_n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}$$

解 将第 1 行的 1 改写成 $x_i-(x_i-1)$,按第 1 行拆分得

$$D=\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \cdots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_n^2(x_n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} -(x_1-1) & -(x_2-1) & \cdots & -(x_n-1) \\ x_1(x_1-1) & x_2(x_2-1) & \cdots & x_n(x_n-1) \\ x_1^2(x_1-1) & x_2^2(x_2-1) & \cdots & x_n^2(x_n-1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}(x_1-1) & x_2^{n-1}(x_2-1) & \cdots & x_n^{n-1}(x_n-1) \end{vmatrix}=$$

$$x_1x_2\cdots x_n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1-1 & x_2-1 & \cdots & x_n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}-x_1^{n-2} & x_2^{n-1}-x_2^{n-2} & \cdots & x_2^{n-1}-x_2^{n-2} \end{vmatrix}-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$\left[\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}^{n}(x_i-x_j)$$

1.6 加边法

加边法即在原行列式基础上增加 1 行、1 列(保持行列式值不变),然后利用增加的行(列)对行列式化简、计算.

例 5 计算行列式$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$.

解 通过加边法把原来的 n 阶行列式转化为 $n+1$ 阶行列式进行计算

$$\text{原式}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix} 2-1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0-1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0-1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}=$$

$$2x_1x_2\ldots x_n\begin{vmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{vmatrix}-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}^{n}(x_i-x_j)=\left[2\prod_{i=1}^{n}x_i-\prod_{i=1}^{n}(x_i-1)\right]\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}^{n}(x_i-x_j)$$

1.7 借助对应矩阵特征值的乘法计算

如$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|$在数域$p$上能分解为一次因式的乘积,由根与系数的关系可知,$\boldsymbol{A}$ 的全体特征值的和为 $a_{11}+a_{22}+\cdots+a_{nn}$(称为 $\boldsymbol{A}$ 的迹,记为 $\mathrm{Tr}(\boldsymbol{A})$).而 $\boldsymbol{A}$ 的全体特征值的积为$|\boldsymbol{A}|$,即方阵的特征值之积恰为其行列式的值;方阵多项式的特征值恰是其特征值的多项式.这是因为 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值,则$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=0$.

$$|\lambda^2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$$

$$\vdots$$

$$|\lambda^n\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^n|=|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|\cdot|\lambda^n\boldsymbol{E}+\lambda^{n-1}\boldsymbol{A}\cdots+\boldsymbol{A}^{n-1}|=0$$

即 λ^i 是 $\boldsymbol{A}^i$ 的特征值,$i=1,2,\cdots,n$.若$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$,$\boldsymbol{A}$ 为 n 阶矩阵,则$f(\lambda)=a_1+a_2\lambda+\cdots+a_n\lambda^{n-1}$是$f(\boldsymbol{A})=a_1\boldsymbol{E}+a_2\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^{n-1}$的特征值.

例 6 证明 $D=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1\end{vmatrix}=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$,其中,$f(x)=a_1+a_2x+\cdots+a_nx^{n-1}$,$\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_{n-1}$为全部 n 次单位根.

证明 设 n 阶矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ 1 & & & \end{pmatrix},则\boldsymbol{A}^2=\begin{pmatrix} & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\\ 1 & & & & \\ & 1 & & & \end{pmatrix},\cdots,\boldsymbol{A}^{n-1}=\begin{pmatrix} & & & 1\\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

因为$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda & -1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & -1\\ -1 & & & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^n-1$,所以 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\cdots\varepsilon_{n-1}$.

又 $a_1\boldsymbol{E}+a_2\boldsymbol{A}+\cdots+a_n\boldsymbol{A}^{n-1}=f(\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\\ a_n & a_1 & \cdots & a_{n-1}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_2 & a_3 & \cdots & a_1\end{pmatrix}$,所以$f(\boldsymbol{A})$的特征值为$f(\varepsilon_0)$,$f(\varepsilon_1)$,$\cdots$,$f(\varepsilon_{n-1})$,所以 $D=|f(\boldsymbol{A})|=f(\varepsilon_0)f(\varepsilon_1)\cdots f(\varepsilon_{n-1})$.

注:符合本题特征的行列式称为循环行列式,因而如上结果具有一般性.此处用到方阵的特征值之积恰为其行列式的值,方阵的多项式的特征值恰是其特征值的多项式.

2 抽象型行列式的计算[4,5]

抽象型行列式一般不给出具体元素,它往往涉及与行列式相关联的方阵、伴随阵、逆矩阵、分块矩阵,以及 n 维向量等的计算.因此,解决该类问题时应灵活运用矩阵的有关性质.,具体讨论时应注意以下几点:

(1) 熟悉公式$|\boldsymbol{A}^{-1}|=|\boldsymbol{A}|^{-1}$,$|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$,$|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$等,这里 n 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数;

(2) 计算$|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|$一般较难,但有公式$|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\cdot|\boldsymbol{B}|$(这里 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 n 阶方阵),所以两个方阵和的

行列式常转化为积的问题;

(3) 遇到伴随矩阵 $|A^*|$ 时,常考虑如下公式 $AA^*=A^*A=|A|E$,然后两边取行列式;

(4) 对形如 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}$ 的分块行列式,一般采用广义初等变换进行“打洞”(即打出一块 0 矩阵),然后两边取行列式,再由拉普拉斯定理展开.如当 A 可逆时,由 $\begin{pmatrix} E & 0 \\ -CA^{-1} & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$,再两边取行列式可得 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{vmatrix}=|A|\cdot|D-CA^{-1}B|$;

(5) 各行(列)以向量及其运算形式给出的行列式,可以按行(列)拆成几个行列式之和;

(6) 当已知矩阵的特征值时,可以用所有特征值之积计算.

例 7　设 A 为 n 阶方阵,且 $AA'=E$(E 是 n 阶单位矩阵,A' 是 A 的转置矩阵),$|A|<0$,求 $|A+E|$.

要计算 $|A+E|$,属于两个方阵和的行列式,由已知,$AA'=E$,可考虑如下方法

1) 对矩阵 $A+E$ 右乘 A',再取行列式;

2) 将 $|A+E|$ 中的单位矩阵换为 AA'.

解法 1　因为 $|A+E|\cdot|A'|=|AA'+A'|=|E+A'|=|E'+A'|=|(E+A)'|=|E+A|$,所以 $|A+E|(|A'|-1)=0$;又因为 $|A'|<0$,所以 $|A+E|=0$.

解法 2　因为 $|A+E|=|A+AA'|=|A(E+A')|=|A||(E+A)'|=|A||E+A|$,所以 $(1-|A|)|A+E|=0$;由于 $1-|A|>0$,所以 $|A+E|=0$.

3　行列式按行(列)展开定理,及代数余子式的应用[6,7]

行列式按行(列)展开定理,以及一个行列式某一行(列)元素与另一行(列)对应元素的代数余子式乘积之和为零这两个事实,在行列式代数余子式、方程组等的讨论中有着广泛的应用.如在求一个行列式某一行元素代数余子式之和时,逐个计算再求和,运算量很大,此时可借助行列式中改变某一元素的取值不影响该元素代数余子式的值这一特点,将该行元素都化为 1,如此得到的行列式即如上要求的值.

例 8　设 $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$,且 A_{ij} 是 $|A|$ 中第 i 行,j 列元素 a_{ij} 的代数余子式.

(1) 求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}$.

(2) 求 $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}$.

解　(1) $A_{31}+A_{32}+A_{33}+A_{34}=\begin{vmatrix} 1 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-6.$

(2) $M_{12}+M_{22}+M_{32}+M_{42}=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}=-2.$

例9 已知5阶行列式 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$,(1)求 $A_{31}+A_{32}+A_{33}$.(2)求 $A_{34}+A_{35}$.

解 因为 $a_{i1}A_{31}+a_{i2}A_{32}+a_{i3}A_{33}+a_{i4}A_{34}+a_{i5}A_{35}=0\,(i\neq 3, i\in \mathbf{N}, 1\leqslant i\leqslant 5)$,所以取 $i=2,4$ 得 $\begin{cases} 2(A_{31}+A_{32}+A_{33})+(A_{34}+A_{35})=0 \\ (A_{31}+A_{32}+A_{33})+2(A_{34}+A_{35})=0 \end{cases}$;进一步得 $\begin{cases} A_{31}+A_{32}+A_{33}=0 \\ A_{34}+A_{35}=0 \end{cases}$.

注:要求某一矩阵所有元素的代数余子式之和,可考虑先求其伴随矩阵,再求伴随矩阵各元素之和.

行列式的计算方法最常见的便是以上7种,但有时也因其结构不同而有其他类型的解法(如三对角线行列式的解法),这里就不一一列举了.在平时的学习中,有时还会碰见一些抽象型行列式的计算,行列式按行(列)展开定理,及代数余子式的应用.

以上计算行列式的基本方法奠定了高等数学的理论基础,同时也为数学在现实生活中的广泛运用提供了理论依据,总而言之,具有实质上研究价值.

参考文献:

[1] 刘洪星.高等代数选讲[M].北京:机械工业出版社,2009

[2] 徐仲,等编.高等代数[M].3版.西安:西北工业大学出版社,2006

[3] 王萼芳,石生明.高等代数[M].3版.北京:高等教育出版社,2003

[4] 陈东升,黄守佳.线性代数与空间解析几何[M].北京:机械工业出版社,2008

[5] 刘先忠,杨明.线性代数[M].3版.北京:高等教育出版社,2008

[6] 胡显佑,彭勇行.线性代数习题集[M].天津:南开大学出版社,2004

[7] 吴世锦. 四元数分量行列式的性质[J].重庆工商大学学报:自然科版,2010,27(5):452-456

The Calculation Method of Determinant

YANG Guan-ling

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Determinant calculation is widely used in various fields. This paper introduces seven kinds of common used methods of calculating the determinant by analyzing some concrete examples including the calculation of the determinant order, abstract determinant, determinant of the expansion theorem and algebraic applications. Some feasible methods are provided for researchers calculating the determinant.

Key words: determinant; expansions; upper triangular ; calculation method