doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.011

微积分一种重要类型极限的计算方法*

张付臣, 孙祥凯

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘　要:给出了一种类型函数极限运算的公式及其在微积分极限计算中的具体应用,应用此极限公式可以求某些极限运算中参数的值,给出一元函数在某一点连续的充分条件和求一个曲线的渐近线,同时提供了一个命题的证明方法.

关键词:极限;探讨;命题

中图分类号:O13　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0046-02

学好微积分这门课程是学好其他课程的前提,微积分在经济、管理、金融中有着重要的应用[1-4].此处给出了一种类型函数极限运算的公式及其在微积分极限运算中的具体应用,应用此极限公式可以求某些极限运算中的参数的值,给出了一元函数在某一点连续性的充分条件和求一个曲线的渐近线等问题,同时给出了一个命题的证明方法.

1　主要内容

定理 1　若$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=c$(其中 c 为任意有限实数,即 $c\neq\infty$),且$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=0$,则有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

证明　直接证明法:$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}\cdot h(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=c\cdot 0=0$.

反证法:假设$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)\neq 0$,则$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=\infty$,与已知条件$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{g(x)}{h(x)}=c\ (c\neq\infty)$矛盾,所以假设不成立,从而有$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$.

注释 1　在上述定理 1 中,可以把条件“$x\to x_0$”修改为“$x\to\infty$”.

应用定理 1 可以求某些极限运算中的参数的值,给出一元函数在某一点连续性的充分条件和求一个曲线的渐近线.

例 1　若$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=c\ (\forall c\neq\infty)$,求 a,b 的值.

解　令 $h(x)=x-1$, $g(x)=x^2+ax+b$, 因为$\lim\limits_{x\to 1}h(x)=0$, 所以由定理 1 可以得$\lim\limits_{x\to 1}g(x)=1+a+b=0\Rightarrow a=-b-1$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-(b+1)x+b}{x-1}=1-b=c$, 所以有 $b=1-c$, $a=c-2$.

例 2　已知$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=c$($c$ 为任意有限实数),求 a,b.

收稿日期:2014-10-25;**修回日期**:2014-12-02.

* **基金项目**:国家自然科学基金项目资助(11426047).

作者简介:张付臣(1983-), 男,山东临沂人,讲师, 博士,从事常微分方程稳定性与分岔的研究.

解　$\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-ax-b)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\dfrac{f(x)-ax-b}{x}}{\dfrac{1}{x}}=c$. 令 $h(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=\dfrac{f(x)-ax-b}{x}$,且$\lim\limits_{x\to\infty}h(x)=0$.由定理 1 得 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$. 从而 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$,$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax-c]$.

例 3　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的左右导数都存在(但不一定相等),即有 $f'_-(x_0)=c_1$,$f'_+(x_0)=c_2$(可以允许 $c_1\neq c_2$),则 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

解　$f'_-(x_0)=c_1=\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,令 $h(x)=x-x_0$,$g(x)=f(x)-f(x_0)$,由定理$\lim\limits_{x\to x_0^-}g(x)=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$.同理有$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.由 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续的充要条件知 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

命题 1[4]　若 $y=f(x)$ 在(a,b)上严格递增(减),且在点 a 右连续,则 $y=f(x)$ 在$[a,b)$上亦为严格递增(减),对右端点 b 可以类似讨论.

这个命题在课本中没有给出证明,下面给出一种简单的证明.

证明　由已知,要证明 $y=f(x)$ 在$[a,b)$上亦为严格递增,只要证明对任意的 $z\in(a,b)$,有 $f(z)>f(a)$ 即可.任取 $z\in(a,b)$,由实数的稠密性知,总可以取到 $x,y\in(a,b)$,满足 $a<x<y<z$, 由函数 $y=f(x)$ 在(a,b)上严格单调递增知 $f(x)<f(y)<f(z)$, 令 $x\to a^+$,$y=f(x)$ 在 a 右连续知,$f(a)=\lim\limits_{x\to a^+}f(x)\leqslant f(y)<f(z)\Rightarrow f(a)<f(z)$,这就证明了对任意的 $z\in(a,b)$,有 $f(z)>f(a)$. 从而 $f(x)$ 在$[a,b)$上亦为严格单调递增.

注释 2　从函数的图形上看命题 1 显然是成立的,因为若 $y=f(x)$ 在(a,b)上严格递增,且在点 a 右连续,则保证了函数的图形在点 a 没有断开,从而保证了 $f(a)$ 为函数在$[a,b)$上的最小值,即 $f(x)$ 在$[a,b)$上亦为严格单调递增.

命题 2　函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 可导且 $f'(x_0)>0$,则必存在 $\delta>0$ 使函数 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内严格单调递增.

命题 2 是个假命题,举出下面的一个反例说明命题 2 是不正确的.

例 4　分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3}+x^2\sin\dfrac{1}{x}, x\neq0\\ 0, x=0\end{cases}$,当 $x\neq0$ 时,$f'(x)=\dfrac{1}{3}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}$,下面计算 $f'(0)$.

因为 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3}+x\sin\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{3}>0$,所以 $y=f(x)$ 满足在点 $x=0$ 可导且 $f'(0)>0$, 但是 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何领域内都不保持相同的符号.事实如下,对任意的 n,有 $f'\left(\dfrac{1}{4n\pi}\right)=-\dfrac{2}{3}$,$f'\left(\dfrac{1}{4n\pi+\pi}\right)=\dfrac{4}{3}$.而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n\pi}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4n\pi+\pi}=0$,故对任意的 $\delta>0$,必存在正整数 N_δ,使 $n>N_\delta$ 时有$\dfrac{1}{4n\pi}\in U(0,\delta)$,$\dfrac{1}{4n\pi+\pi}\in U(0,\delta)$. 故 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的任何领域内都不保持相同的符号,从而 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的任何领域内都不能保持严格单调递增性.

注释 3　1) 此题表明,即使函数 $y=f(x)$ 在定义域内处处可导,但是由一点 x_0 处 $f'(x_0)>0$ 不能保证存在 x_0 的某邻域使该函数 $y=f(x)$ 在该点邻域内严格单调递增.

2) 如果知道 $f'(x_0)>0$, 且导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处连续,即$\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)=f'(x_0)>0$. 则由连续函数的局部保号性知,一定存在 $\delta>0$,使在 $U(x_0,\delta)$ 内 $f'(x)>0$, 从而保证 $y=f(x)$ 在 $U(x_0,\delta)$ 内严格单调递增.而上述例题 4 中 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 是不连续的,这是因为$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{3}+2x\sin\dfrac{1}{x}-\cos\dfrac{1}{x}\right)$极限不存在,虽然 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$.

(下转第 **104** 页)