第 32 卷第 7 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 7 月
Vol. 32 NO.7 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Jul.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.010

关于粗理想和粗直积的一些性质定理*

黄卫华, 周　平, 陆亚哲

(文山学院 数学学院,云南 文山 663000)

摘　要:在粗糙集概念的基础上,讨论了同余关系下的粗理想和粗直积的关系,得到了一些较好的性质定理,进而丰富和完善了半群中的粗糙集理论.

关键词:半群;同余关系;粗直积;粗理想

中图分类号:O159　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0043-03

近年来,国内外学者将粗糙集思想引入代数系统,对粗糙群、粗糙半群、粗理想和粗直积等概念做了大量研究,得出了很好的结论[1-5].文献[3]提出了半群中粗糙子半群和粗糙左(右、双侧、双)理想等概念;文献[5]定义了半群中的粗直积.此处讨论了粗理想和粗直积的关系,得到了一些较好的性质定理,进而丰富和完善了半群中的粗糙集理论.

1　预备知识

定义 1[2]　设 S 是一个半群,如果 ρ 是满足以下条件的 S 上的一个等价关系:对 $\forall x\in S,(a,b)\in\rho\Rightarrow(ax,bx)\in\rho,(xa,xb)\in\rho$,则称 ρ 是 S 上的同余关系.记 x 所在的同余类为 $[x]_\rho=\{a\in S|(x,a)\in\rho\}$.

定义 2[3]　设 A 是 S 的任一子集,则 A 的 ρ 下近似和 ρ 上近似分别表示为

$$\rho_-(A)=\{x\in S\mid [x]_\rho\subseteq A\},\rho^-(A)=\{x\in S\mid [x]_\rho\cap A\neq\varnothing\}$$

$\rho(A)=(\rho_-(A),\rho^-(A))$ 称为 ρ 粗糙集.

定义 3[4]　半群 S 上的一个同余关系 ρ 称为完备的,如果对 $\forall a,b\in S,[a]_\rho[b]_\rho=[ab]_\rho$.

定义 4[4]　设 ρ 为半群 S 上的同余关系,$\rho_-(A),\rho^-(A),\rho_-(B),\rho^-(B)$ 为 S 的非空粗子集,$A,B\subseteq S$,则 S 上的粗直积记为

$$\rho_-(A)\rho_-(B)=\{c\in S\mid c=ab,a\in\rho_-(A),b\in\rho_-(B)\}$$

$$\rho^-(A)\rho^-(B)=\{c\in S\mid c=ab,a\in\rho^-(A),b\in\rho^-(B)\}$$

定义 5　半群 S 的非空子集 A 称为 S 的子半群,如果 $AA\subseteq A$.

定义 6　半群 S 的非空子集 A 称为 S 的左(右)理想,如果 $SA\subseteq A(AS\subseteq A)$.

定义 7　半群 S 的非空子集 A 称为 S 的(双侧)理想,如果 $SA\subseteq A$ 且 $AS\subseteq A$.

定义 8　半群 S 的非空子集 A 称为 S 的双理想,如果 $ASA\subseteq A$.

定义 9　设 ρ 是半群 S 的一个同余关系,$\rho_-(A)\neq\varnothing$,S 的非空集 A 称为一个上(下)粗子半群,如果

收稿日期:2014-11-21;**修回日期**:2014-12-27.

* **基金项目**:云南省科技厅应用基础研究青年项目资助(2013FD052);云南省教育厅科学研究基金项目资助(2013Y585);文山学院高等代数精品课程资助;文山学院重点学科"数学"建设项目资助(12WSXK01).

作者简介:黄卫华(1979-),女,河南中牟人,讲师,硕士,从事信息代数、半群和粗糙集理论研究.

$\rho^{-}(A)(\rho_{-}(A))$是 S 的子半群,即$\rho^{-}(A)\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(A)(\rho_{-}(A)\rho_{-}(A)\subseteq\rho_{-}(A))$.

定义 10 设ρ是半群 S 的一个同余关系,$\rho_{-}(A)\neq\varnothing$,$S$ 的非空集 A 称为一个上(下)粗左(右、双侧、双)理想,如果$\rho^{-}(A)(\rho_{-}(A))$是 S 的左(右、双侧、双)理想,即

$$S\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(A)(\rho^{-}(A)S\subseteq\rho^{-}(A);\rho^{-}(A)S\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(A);\rho_{-}(A)S\rho_{-}(A)\subseteq\rho_{-}(A))$$

引理 1 设 A,B,C,D 是半群 S 的非空子集,如果 $A\subseteq B,C\subseteq D$,则 $AC\subseteq BD$.

引理 2[4] 设ρ是半群 S 上的同余关系,A,B 是 S 的非空子集,则$\rho^{-}(A)\rho^{-}(B)\subseteq\rho^{-}(AB)$,$\rho_{-}(A)\rho_{-}(B)\subseteq\rho_{-}(AB)$.

引理 3[4] 设ρ,λ 是半群 S 上的同余关系,$A,B\in S$,则

(1) $\rho_{-}(A)\subseteq A\subseteq\rho^{-}(A)$,$\rho_{-}(S)=S=\rho^{-}(S)$;

(2) $\rho^{-}(A\cup B)=\rho^{-}(A)\cup\rho^{-}(B)$,$\rho_{-}(A\cup B)=\rho_{-}(A)\cup\rho_{-}(B)$;

(3) $A\subseteq B\Rightarrow\rho_{-}(A)\subseteq\rho_{-}(B)$,$\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(B)$;

(4) $\rho_{-}(A)\cup\rho_{-}(B)\subseteq\rho_{-}(A\cup B)$,$\rho^{-}(A\cap B)\subseteq\rho^{-}(A)\cap\rho^{-}(B)$.

2 主要结果

定理 1 设 A 是半群 S 的一个左(右、双侧)理想,那么 A 是 S 的子半群.

证明 因为 $A\subseteq S,A\subseteq A$,由引理 1 知,$AA\subseteq SA$;又因为 A 是 S 的左理想,得 $SA\subseteq A$,那么 $AA\subseteq SA\subseteq A$,所以 A 是 S 的子半群.

其他情况可类似证明,略.

定理 2 设ρ是半群 S 上的同余关系,如果 A 是 S 的一个子半群,则 A 是 S 的一个上粗子半群,即$\rho^{-}(A)$是 S 的子半群.

证明 由引理 2 知,$\rho^{-}(A)\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(AA)$,已知 A 是 S 的一个子半群,则 $AA\subseteq A$,又由引理 3(3)知$\rho^{-}(AA)\subseteq\rho^{-}(A)$,所以$\rho^{-}(A)\rho^{-}(A)\subseteq\rho^{-}(A)$.即$\rho^{-}(A)$是 S 的子半群,则 A 是 S 的一个上粗子半群.

推论 1 设ρ是半群 S 上的同余关系,如果 A 是半群 S 的一个左(右、双侧)理想,则 A 是 S 的一个上粗子半群.

证明 由定理 1 和定理 2 直接推知.

定理 3 设ρ是半群 S 上的同余关系,如果 A 是 S 的一个右(左、双侧、双)理想,则 A 是 S 的一个上粗右(左、双侧、双)理想.

证明 设 A 是 S 的一个右理想,即 $AS\subseteq A$,由引理 3(3)知,$\rho^{-}(AS)\subseteq\rho^{-}(A)$,又由引理 3(1)知$\rho^{-}(S)=S$,于是有$\rho^{-}(A)S=\rho^{-}(A)\rho^{-}(S)$,又由引理 2 知,$\rho^{-}(A)\rho^{-}(S)=\rho^{-}(AS)$,所以$\rho^{-}(A)S\subseteq\rho^{-}(AS)\subseteq\rho^{-}(A)$,即$\rho^{-}(A)$是 S 的右理想,故 A 是 S 的一个上粗右理想.

其余情况的证明类似.

以上两个定理说明上粗子半群(左理想、右理想、双侧理想)是通常的子半群(左理想、右理想、双侧理想)等概念的扩张,下面的例子说明定理 3 的逆不成立.

例 1 设 $S=\{a,b,c,d\}$是一个半群,其上的运算由表 1 定义,S 上的同余关系ρ所决定的同余类为$\{a\}$,$\{d\}$,$\{b,c\}$,设 $A=\{b\}$,则$\rho^{-}(A)=\{b,c\}$,且$\rho^{-}(A)S=\{b,c\}S=S\{b,c\}=S\rho^{-}(A)=\rho^{-}(A)$.故 A 是一个上粗双侧理想,但是 $SA=\{b,c\}\not\subseteq A$,故 A 不是 S 的双侧理想.

表 1 S 上的运算

a	b	c	d
a	a	c	d
b	b	b	b
c	c	c	c
d	d	b	a

定理 4　设 ρ 是半群 S 上的完备同余关系,$\rho_-(A)\neq\varnothing$,如果 A 是 S 的一个子半群,则 A 是 S 的一个下粗子半群,即 $\rho_-(A)$ 是 S 的子半群.

证明　已知 A 是 S 的一个子半群,则 $AA\subseteq A$,由引理 3(1)知,$\rho_-(A)\subseteq A\subseteq S$,又因为 ρ 是半群 S 上的完备同余关系,则有 $\rho_-(A)\rho_-(A)\subseteq\rho_-(AA)\subseteq\rho_-(A)$,即 A 是 S 的一个下粗子半群,则 $\rho_-(A)$ 是 S 的子半群.

推论 2　设 ρ 是半群 S 上的完备同余关系,$\rho_-(A)\neq\varnothing$,如果 A 是半群 S 的一个左(右、双侧)理想,则 A 是 S 的一个下粗子半群.

证明　由定理 1 和定理 4 直接推知.

定理 5　设 ρ 是半群 S 上的一个完备同余关系,如果 A 是 S 的一个右(左、双侧、双)理想,且 $\rho_-(A)\neq\varnothing$,则 $\rho_-(A)$ 是 S 的一个右(左、双侧、双)理想.

证明　设 A 是 S 的一个右理想,即 $AS\subseteq A$,由引理 3(3)知,$\rho_-(AS)\subseteq\rho_-(A)$,又由引理 3(1)知,$\rho_-(S)=S$,于是有 $\rho_-(A)S=\rho_-(A)\rho_-(S)$,又由引理 2 知,$\rho_-(A)\rho_-(S)=\rho_-(AS)$,所以 $\rho_-(A)S\subseteq\rho_-(AS)\subseteq\rho_-(A)$,即 $\rho_-(A)$ 是 S 的右理想,故 A 是 S 的一个下粗右理想.

其余情况的证明类似.

定理 6　设 ρ 是半群 S 上的同余关系,如果 A,B 分别是 S 的右理想和左理想,则

$$\rho^-(A)\rho^-(B)\subseteq\rho^-(AB)\subseteq\rho^-(A\cap B)\subseteq\rho^-(A)\cap\rho^-(B)$$

证明　因为 ρ 是半群 S 上的同余关系,由引理 2 知,$\rho^-(A)\rho^-(B)\subseteq\rho^-(AB)$. 下证 $\rho^-(AB)\subseteq\rho^-(A\cap B)$. 由引理 1 知,$AB\subseteq AS$,又因为 A 是 S 的一个右理想,则 $AS\subseteq A$,所以 $AB\subseteq A$,同理 $AB\subseteq B$,故 $AB\subseteq A\cap B$. 由引理 3(3)知,$\rho^-(AB)\subseteq\rho^-(A\cap B)$,由引理 3(4)得,$\rho^-(A\cap B)\subseteq\rho^-(A)\cap\rho^-(B)$,故 $\rho^-(A)\rho^-(B)\subseteq\rho^-(AB)\subseteq\rho^-(A\cap B)\subseteq\rho^-(A)\cap\rho^-(B)$.

定理 7　设 ρ 是半群 S 上的一个完备同余关系,且 $\rho_-(A)\neq\varnothing$,如果 A,B 分别是 S 的右理想和左理想,则

$$\rho_-(A)\rho_-(B)\subseteq\rho_-(AB)\subseteq\rho_-(A\cap B)\subseteq\rho_-(A)\cap\rho_-(B)$$

证明类似于定理 8,略.

参考文献:

[1] PAWLAK Z. Rough Sets [J]. International Journal of Computer and Information Science, 1982(11): 341-356

[2] JMHOWIE. An Introduction to Semigroup Theory[M].London New York San Prancisco Academic Press, 1976

[3] BUAKI K.Rough Ideals in Semigroups[J].Information Sciences, 1997, 100: 139-163

[4] 张文修,吴伟志.粗糙集理论与方法[M].北京:科学出版社,2001

[5] 肖光灿.半群中的粗理想[J].电子科技大学学报,2005,34(4):562-565

[6] 刘清.Rough 集及 Rough 推理[M].北京:科学出版社,2001

[7] 于佳丽,舒兰.半群中粗理想的性质[J].电子科技大学学报,2002,31(5):539-541

Some Property Theorem on Rough Ideal and Rough Direct Product

HUANG Wei-hua, ZHOU Ping, LU Ya-zhe

(School of Mathematics, Wenshan University, Wenshan 663000, China)

Abstract: Based on the concept of rough sets, this paper discusses the relationship between rough ideal and rough direct product in congruence relation, gets some good properties theorem, and further enriches and improves the rough set theory in semigroups.

Keywords: semigroups; congruence relation; rough direct product; rough ideal