第 32 卷第 7 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 7 月
Vol. 32　NO.7　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　Jul.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.008

二项式等式的一种新方法证明与 q 化

王小丽, 韩聪聪
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:主要是对 Jonathon Peterson 的著名的二项式等式及其推广采用了一种新的方法——围线积分进行证明,并且采用柯西留数定理对它们进行了 q 化;与此同时也得到了一些类似于 Jonathon Peterson 的二项式等式的新的二项式等式及其 q 化等式.

关键词:二项式等式;柯西留数定理;q-二项式定理;q 级数

中图分类号:O156　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0036-04

1　预备知识

引理 1[1] **(柯西留数定理)**　$f(z)$ 在周线或复周线 C 所范围的区域 D 内,除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外解析,在闭区域 $\overline{D}=D+C$ 上除 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 外连续,则(“大范围”积分)

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z) \tag{1}$$

引理 2[2]　$f(z)$ 是一个在$[0,+\infty]$上解析的有理函数,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}f(k)=\frac{(-1)^n}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

其中 C 是一个仅围住极点 $0,1,2,\cdots,n$ 的正向封闭曲线.

定义 1[3]　对于任意的 $n,k\in\mathbf{N}$,定义 q-二项式定理为

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q=\frac{(q;q)_n}{(q;q)_k(q;q)_{n-k}} \tag{3}$$

其中,$(z;q)_n=(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^{n-1})$.

引理 3[4]　$f(z)$ 是一个在$[0,+\infty]$上解析的有理函数,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q f(q^{-k})=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{(q;q)_n}{(z;q)_{n+1}}f(z)\,\mathrm{d}z \tag{4}$$

其中 C 是一个仅围住极点 $1,q^{-1},q^{-2},\cdots,q^{-n}$ 的正向封闭曲线.

收稿日期:2014-10-25;**修回日期**:2014-12-18.

作者简介:王小丽(1991-),女,湖北荆州人,硕士研究生,从事超几何级数研究.

2　Jonathon Peterson 的著名二项式等式的新证明

在文献[5]中,Jonathon Peterson 已经给出了利用两种不同的随机分布来求同一事件概率的方法,对著名的二项式等式(5)给出了一个有趣的概率证明.这里将对其采用围线积分的新方法来进行证明.

定理 1[5]　若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n\in\mathbf{N}$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\theta}{\theta+k}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\theta+k}\tag{5}$$

证明　在式(2)中取 $f(z)=\frac{\theta}{z+\theta}$,利用式(1)计算留数,有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\theta}{\theta+k}&=\frac{(-1)^n}{2\pi i}\int_C\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\frac{\theta}{\theta+z}dz=\\&(-1)^{n+1}\operatorname*{Res}_{z=-\theta}\frac{n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}\frac{\theta}{\theta+z}=\\&(-1)^{n+1}\lim_{z\to-\theta}\frac{\theta n!}{z(z-1)\cdots(z-n)}=\\&(-1)^{n+1}\frac{\theta n!}{-\theta(-\theta-1)\cdots(-\theta-n)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\theta+k}\end{aligned}$$

定理 2[5]　若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n,m\in\mathbf{N}$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\theta}{\theta+k}\right)^m=\prod_{k=1}^{n}\frac{k}{\theta+k}\left(1+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_j\leqslant n}\frac{\theta^j}{(\theta+k_1)\cdots(\theta+k_j)}\right)\tag{6}$$

证明　在式(2)中取 $f(z)=\left(\frac{\theta}{z+\theta}\right)^m$,类似定理 1 的证明,可证明此结论成立.

3　q 化 Jonathon Peterson 的著名二项式等式

q 化是超几何级数中的一个很好的数学分支内容,更多的 q 超几何级数的知识可以参见文献[3].这里将利用柯西留数定理对 Jonathon Peterson 的著名二项式等式进行 q 化.

定理 3　若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n,m\in\mathbf{N}$,那么

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{\theta}{q^{-k}-q^{\theta}}\right)^m=\frac{\theta^m(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{\theta+k})}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{m-1}\leqslant n}\frac{q^{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}}}{(1-q^{k_1+\theta})\cdots(1-q^{k_{m-1}+\theta})}\tag{7}$$

证明　在式(4)中取 $f(z)=\left(\frac{\theta}{z-q^{\theta}}\right)^m$,利用式(1)计算留数,有

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k-1}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{\theta}{q^{-k}-q^{\theta}}\right)^m&=\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{(q;q)_n}{(z;q)_{n+1}}\left(\frac{\theta}{z-q^{\theta}}\right)^m dz=\\&-\operatorname*{Res}_{z=q^{\theta}}\frac{(q;q)_n}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^n)}\left(\frac{\theta}{z-q^{\theta}}\right)^m=\\&-[(z-q^{\theta})^{m-1}]\frac{\theta^m(q;q)_n}{(1-z)(1-zq)\cdots(1-zq^n)}=\end{aligned}$$

$$
-[z^{m-1}]\frac{\theta^m(q;q)_n}{(1-q^\theta-z)(1-q^{1+\theta}-zq)\cdots(1-q^{n+\theta}-zq^n)}=
$$

$$
-\frac{\theta^m(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{\theta+k})}[z^{m-1}]\frac{1}{\left(1-\frac{z}{1-q^\theta}\right)\left(1-\frac{zq}{1-q^{1+\theta}}\right)\cdots\left(1-\frac{zq^n}{1-q^{n+\theta}}\right)}=
$$

$$
-\frac{\theta^m(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{\theta+k})}[z^{m-1}]\left(\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{z}{1-q^\theta}\right)^j\right)\left(\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{zq}{1-q^{1+\theta}}\right)^j\right)\cdots\left(\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{zq^n}{1-q^{n+\theta}}\right)^j\right)=
$$

$$
-\frac{\theta^m(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{\theta+k})}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{m-1}\leqslant n}\frac{q^{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}}}{(1-q^{k_1+\theta})\cdots(1-q^{k_{m-1}+\theta})}
$$

推论 1 若所有的 $\theta>0$,那么

$$
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\frac{\theta}{q^{-k}-q^\theta}=\frac{\theta(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{\theta+k})} \tag{8}
$$

证明 在式(7)中取 $m=1$,并且定义 $\prod_{k=n+1}^{n}=1$, $\sum_{i=1}^{0}=0$,可以得到式(8).

注 1 分别给式(7)(8)两边同时乘以$(1-q)^m$ 与 $1-q$,并且让 $q\to 1$,就可以得到式(5)和式(6),显然式(7)(8)是 Jonathon Peterson 的著名二项式等式的一个 q 化等式.

4 一些新的结果及其 q 化

最后,利用柯西留数定理得到了一些类似于 Jonathon Peterson 的著名二项式等式的新等式及其 q 化公式.

定理 4 若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n,m\in\mathbf{N}$,那么当 $\theta\notin\{0,1,\cdots,n\}$时,有

$$
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\frac{\theta}{k-\theta}^m=(-1)^{n+1}\binom{\theta-1}{n}^{-1}\left((-1)^{m+1}+\sum_{j=1}^{m-1}\sum_{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_j\leqslant n}\frac{\theta^j}{(k_1-\theta)\cdots(k_j-\theta)}\right) \tag{9}
$$

当 $\theta\in\{0,1,\cdots,n\}$时,有

$$
\sum_{\substack{k=0\\k\neq\theta}}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\theta}{k-\theta}\right)^m=(-1)^{\theta+1}\binom{n}{\theta}\left((-1)^m+\sum_{j=1}^{m}\sum_{\substack{1\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_j\leqslant n\\k_1,k_2,\cdots,k_j\neq\theta}}\frac{\theta^j}{(k_1-\theta)\cdots(k_j-\theta)}\right) \tag{10}
$$

证明 类似定理 1 的证明,在式(2)中取$f(z)=\left(\frac{\theta}{z-\theta}\right)^m$,并且分别取 C 是一个仅围住极点 $0,1,2,\cdots,n$ 与仅围住极点 $0,1,\cdots,\theta-1,\theta+1,\cdots,n$ 的正向封闭曲线,利用式(1)计算留数,就可以证明式(9)和(10)成立.

定理 5 若所有的 $\theta>0$,并且所有的 $n,m\in\mathbf{N}$,那么当 $\theta\notin\{0,1,\cdots,n\}$时,有

$$
\sum_{k=0}^{n}(-1)^k q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{\theta}{q^{-k}-q^{-\theta}}\right)^m=
$$

$$
\frac{\theta^m(q;q)_n}{\prod_{k=0}^{n}(1-q^{k-\theta})}\sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_{m-1}\leqslant n}\frac{q^{k_1+k_2+\cdots+k_{m-1}}}{(1-q^{k_1-\theta})(1-q^{k_2-\theta})\cdots(1-q^{k_{m-1}-\theta})} \tag{11}
$$

当 $\theta\in\{0,1,\cdots,n\}$时,有

$$\sum_{\substack{k=0\\k\neq\theta}}^{n}(-1)^{k}q^{\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}_q\left(\frac{\theta}{q^{-k}-q^{-\theta}}\right)^{m}=$$

$$-\frac{q^{-\theta}\theta^{m}(q;q)_{n}}{\prod\limits_{k=0,k\neq\theta}^{n}(1-q^{k-\theta})}\sum_{\substack{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_m\leqslant n\\k_1,k_2,\cdots k_m\neq\theta}}\frac{q^{k_1+k_2+\cdots+k_m}}{(1-q^{k_1-\theta})(1-q^{k_2-\theta})\cdots(1-q^{k_m-\theta})}\tag{12}$$

证明　类似定理 3 的证明,在式(4)中取 $f(z)=\left(\frac{\theta}{z-q^{-\theta}}\right)^{m}$,分别取 C 是一个仅围住极点 $1,q^{-1},\cdots,q^{-n}$,与仅围住极点 $1,q^{-1},\cdots,q^{-\theta+1},q^{-\theta-1},\cdots,q^{-n}$ 的正向封闭曲线,利用式(1)计算留数,就可以证明式(11)和(12)成立.

注 2　分别给式(11)和(12)两边同时乘以 $(1-q)^{m}$,并且让 $q\to1$,可以得到式(9)和(10),显然,得到了式(9)和(10)的一个 q 化等式.

参考文献:

[1] 钟玉泉.复变函数论[M].北京:高等教育出版社,2003

[2] FLAJOLET P, SEDGEWICK R. Mellin Transforms and Asymptotics: Finite differences and Rice's integrals[J]. Theoretical Computer Science,1995 (144):101-124

[3] GASPER G,RAHMAN M.Basic Hypergeometric Series[M].Cambridge University Press,2004

[4] PRODINGER H.Some Applications of the q-Rice Formula[J].Random Structures Algorithms,2001(19):552-557

[5] JONATHON P.A Probabilistic Proof of a Binomial Identity[J].The American Mathematical Monthly,2013(120):558-562

A New Proof and Q-identities of Binomial Identities

WANG Xiao-li, HAN Cong-cong

(School of mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper uses a contour integral to give a new proof of the well-known binomial identities(5) by Jonathon Peterson and its generalization (6), and get some q- identities by Cauchy's residues theorem. Meanwhile, some new binomial identities and the q- identities similar to the binomial identities by Jonathon Peterson.

Key words: binomial identities; Cauchy's residues theorem; q-binomial theory; q- identities