doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0007.006

用逆矩阵求某些常系数非齐次线性微分方程的特解*

强 成 秀
(兰州商学院陇桥学院 数学部,兰州 730100)

摘　要:根据函数的求导运算与不定积分互为逆运算的思想,利用逆矩阵方法讨论了求解某些常系数非齐次线性微分方程的特解,得到了求解该类问题的一般公式,并给出了证明和算例.

关键词:非齐次线性微分方程;特解;逆矩阵

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)07-0030-03

常系数线性微分方程的理论研究已很完整,它在工程技术等实际领域也有着广泛的应用,可以用代数方法求它们的通解[1-3].类似于线性方程组的解的结构,常系数非齐次线性微分方程的通解也等于它的对应齐次方程的通解与它本身的一个特解之和.在常微分方程理论中,可以用待定系数法来求其特解[4].利用逆矩阵的方法求某些特殊函数的不定积分,并没有从理论上给出结论和证明[1],从而使得该方法在应用时候缺乏理论依据.此处将利用矩阵工具,给出求某些常系数非齐次线性微分方程特解的一般理论和方法.

1　主要结论

定理 1　设 V 是实数域 $\mathbf{R}$ 上全体可微函数所构成的线性空间,D 是 V 上一个求导变换,如果常系数非齐次线性微分方程 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f(x)$ 中已知函数 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)$ 满足 $f_i(x)\in S_i$ 且 $D(S_i)=D^2(S_i)=\cdots=D^n(S_i)=S_i,i=1,2,\cdots,m$.其中 S_i 是 V 的一个有限维子空间,则该常系数非齐次线性微分方程可用于逆矩阵方法来求其特解.

证明　令 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x),S_1=L(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))$.

设求导变换 $D|_{S_1},D^2|_{S_1},\cdots,D^n|_{S_1}$ 在基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^2,\cdots,\boldsymbol{A}^n$,由定理 1 的条件知 S_1 在求导变换 $D|_{S_1},D^2|_{S_1},\cdots,D^n|_{S_1}$ 下是封闭的,设线性变换 $\varphi(D)=a_nD^n+a_{n-1}D^{n-1}+\cdots+a_1D+a_0\varepsilon$($\varepsilon$ 是恒等变换),很容易知道 $\varphi(D)|_{S_1}(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))=(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))\varphi(A)$,则 $\varphi(D)$ 在该组基下的矩阵为 $\varphi(\boldsymbol{A})$,其中 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$($\boldsymbol{E}$ 是单位矩阵),由 $\dim\varphi(D)|_{S_1}(S_1)=n$ 和线性变换的维数 $\dim S_1=\dim\varphi(D)|_{S_1}(S_1)+\dim(\varphi(D)|_{S_1})^{-1}(0)$ 知 $\dim(\varphi(D)|_{S_1})^{-1}(0)=0$,从而$\varphi(D)|_{S_1}$ 是可逆的线性变换,故

$$(\varphi(D)|_{S_1})^{-1}(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))=(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}$$

令 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$,这样求出 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)$ 的一个特解为

$$y_1^*=b_{1i}f_{11}(x)+b_{2i}f_{12}(x)+\cdots+b_{ni}f_{1n}(x),i=1,2,\cdots,n$$

收稿日期:2014-10-15;**修回日期**:2014-11-27.

***基金项目**:国家自然科学基金赞助项目资助(11061033).

作者简介:强成秀(1987-),女,甘肃兰州人,硕士,助教,从事有限维代数表示论与量子群研究.

说明　若方程 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)$ 右边的函数换为 $f_2(x),f_3(x),\cdots,f_m(x)$,求解同上.若方程 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)$ 右边的函数为某几个函数之和,则根据非齐次线性微分方程解的叠加原理可得该方程的一个特解.

用逆矩阵求常系数非齐次线性微分方程的特解的具体方法:

(1) 当 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)$ 时,步骤为

① 根据 $f_1(x)$ 构造一个由基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 生成的子空间 $S_1=L(f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x))$,并且 S_1 在求导变换 $D|_{S_1},D^2|_{S_1},\cdots,D^n|_{S_1}$ 下是封闭的;

② 求 $D|_{S_1}$ 在基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$;

③ 求线性变换 $(D|_{S_1})^n$ 在基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^n$,相应地线性变换 $(D|_{S_1})^{n-1}$ 在基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 下的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{n-1}$,依次求出 $\boldsymbol{A}^{n-2},\boldsymbol{A}^{n-3},\cdots,\boldsymbol{A}^2$;

④ 求 $\varphi(\boldsymbol{A})=a_n\boldsymbol{A}^n+a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1}+\cdots+a_1\boldsymbol{A}+a_0\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵.根据代数知识求逆矩阵 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$,则 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 就是逆变换 $(\varphi(D)|_{S_1})^{-1}$ 在基 $f_{11}(x),f_{12}(x),\cdots,f_{1n}(x)$ 下的矩阵;

⑤ 根据 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=(b_{ij})_{n\times n}$ 写出 $(\varphi(D)|_{S_1})^{-1}(f_1(x))=b_{1i}f_{11}(x)+b_{2i}f_{12}(x)+\cdots+b_{ni}f_{1n}(x)\ \ i=1,2,\cdots,n$;

⑥ 于是 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)$ 的特解为

$$y_1^*=b_{1i}f_{11}(x)+b_{2i}f_{12}(x)+\cdots+b_{ni}f_{1n}(x),i=1,2,\cdots,n$$

(2) 当 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)$ 时,只需要依次求出 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_i(x),i=1,2,\cdots,m$ 的特解 y_i^*,再根据非齐次线性微分方程解的叠加原理得到 $a_ny^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_m(x)$ 的一个特解为 $y^*=y_1^*+y_2^*+\cdots+y_m^*$.

2　应用举例

例 1　利用逆矩阵求方程 $y''+y'-y=\mathrm{e}^{ax},a\in\mathbf{R}$ 的一个特解.

解　首先寻找一个包含 e^{ax} 的 V 的子空间 S,且 S 在求导运算的作用下不变.通过 $x\mathrm{e}^{ax}$ 的连续求导运算,得到 S 的一个基为 $\mathrm{e}^{ax},x\mathrm{e}^{ax}$,且有 $D(\mathrm{e}^{ax})=a\mathrm{e}^{ax},D(x\mathrm{e}^{ax})=\mathrm{e}^{ax}+ax\mathrm{e}^{ax}$,从而线性变换 $D|_S$ 和 $(D|_S)^2$ 在基 $\mathrm{e}^{ax},x\mathrm{e}^{ax}$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1\\0&a\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}a^2&2a\\0&a^2\end{bmatrix}$$

于是

$$\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}a^2+a-1&2a+1\\0&a^2+a-1\end{bmatrix}$$

从而

$$(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=\frac{1}{(a^2+a-1)^2}\begin{bmatrix}a^2+a-1&-(2a+1)\\0&a^2+a-1\end{bmatrix}$$

由于不定积分是求导运算的逆运算,从而可以利用 $\varphi(D)=(D|_S)^2+(D|_S)-\varepsilon$($\varepsilon$ 是恒等变换)的逆变换 $(\varphi(D))^{-1}=((D|_S)^2+(D|_S)-\varepsilon)^{-1}$ 在基 $\mathrm{e}^{ax},x\mathrm{e}^{ax}$ 下的逆矩阵 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 来求 $y''+y'-y=\mathrm{e}^{ax}$ 的一个特解,即

$$((D|_S)^2+(D|_S)-\varepsilon)^{-1}(\mathrm{e}^{ax})=\frac{1}{(a^2+a-1)^2}[(a^2+a-1)\mathrm{e}^{ax}+0]=\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+a-1}$$

因此方程 $y''+y'-y=\mathrm{e}^{ax}$ 的一个特解为 $y^*=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+a-1}$.

例 2 利用逆矩阵求方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解.

解 首先寻找一个包含 $x\cos 2x$ 的 V 的子空间 S,且 S 在求导运算的作用下不变.通过 $x\cos 2x$ 的连续求导运算,得到 S 的一个基为 $\sin 2x,\cos 2x,x\sin 2x,x\cos 2x$,且有 $D(\sin 2x)=2\cos 2x$,$D(\cos 2x)=-2\sin 2x$ 以及 $D(x\sin 2x)=\sin 2x+2x\cos 2x$,$D(x\cos 2x)=\cos 2x-2x\sin 2x$,从而线性变换 $D|_S$ 和 $(D|_S)^2$ 在基 $\mathrm{e}^{ax},x\mathrm{e}^{ax}$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-2&1&0\\2&0&0&1\\0&0&0&-2\\0&0&2&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-4&0&0&-4\\0&-4&4&0\\0&0&-4&0\\0&0&0&-4\end{bmatrix}$$

于是 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-3&0&0&-4\\0&-3&4&0\\0&0&-3&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix}$,从而 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}&0&0&\frac{4}{9}\\0&-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&0\\0&0&-\frac{1}{3}&0\\0&0&0&-\frac{1}{3}\end{bmatrix}$.

可以利用 $\varphi(D)=(D|_S)^2+\varepsilon$ 的逆变换 $(\varphi(D))^{-1}=((D|_S)^2+\varepsilon)^{-1}$ 在基 $\sin 2x,\cos 2x,x\sin 2x,x\cos 2x$ 下的逆矩阵 $(\varphi(A))^{-1}$ 来求 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解,即 $((D|_S)^2+\varepsilon)^{-1}(x\cos 2x)=\frac{4}{9}\sin 2x-\frac{1}{3}x\cos 2x$.

因此方程 $y''+y=x\cos 2x$ 的一个特解为 $y^*=\frac{4}{9}\sin 2x-\frac{1}{3}x\cos 2x$.

例 3 利用逆矩阵求方程 $y''-y'=\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的一个特解.

解 首先寻找一个包含 $\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的 V 的子空间 S,且 S 在求导运算的作用下不变.通过 $\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的连续求导运算,得到 S 的一个基为 $\mathrm{e}^x\sin 2x,\mathrm{e}^x\cos 2x$,且有 $D(\mathrm{e}^x\sin 2x)=\mathrm{e}^x\sin 2x+2\mathrm{e}^x\cos 2x$ 以及 $D(\mathrm{e}^x\cos 2x)=-2\mathrm{e}^x\sin 2x+\mathrm{e}^x\cos 2x$,从而线性变换 $D|_S$ 和 $(D|_S)^2$ 在基 $\mathrm{e}^x\sin 2x,\mathrm{e}^x\cos 2x$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&-2\\2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}-3&-4\\4&-3\end{bmatrix}$$

于是 $\varphi(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}=\begin{bmatrix}-4&-4\\4&-4\end{bmatrix}$,从而 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{8}&\frac{1}{8}\\-\frac{1}{8}&-\frac{1}{8}\end{bmatrix}$.

可以利用 $\varphi(D)=(D|_S)^2-\varepsilon$ 的逆变换 $(\varphi(D))^{-1}=((D|_S)^2-\varepsilon)^{-1}$ 在基 $\mathrm{e}^x\sin 2x,\mathrm{e}^x\cos 2x$ 下的逆矩阵 $(\varphi(\boldsymbol{A}))^{-1}$ 来求 $y''-y'=\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的一个特解,即

$$((D|_S)^2-\varepsilon)^{-1}(\mathrm{e}^x\cos 2x)=\frac{1}{8}\mathrm{e}^x\sin 2x-\frac{1}{8}\mathrm{e}^x\cos 2x$$

因此方程 $y''-y'=\mathrm{e}^x\cos 2x$ 的一个特解为 $y^*=\frac{1}{8}\mathrm{e}^x\sin 2x-\frac{1}{8}\mathrm{e}^x\cos 2x$.

使用方法是有条件的,$f(x)$ 必须满足定理 1 的条件,如果取 $f(x)$ 分别为 $\ln x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x,\arcsin x,\arccos x$ 等一些基本初等函数时,不适用方法.$f(x)$ 为含有 $x^n,\mathrm{e}^{ax},\sin ax,\cos ax,x\in\mathbf{R}$ 的初等函数时适用本方法.这进一步表明数学中逆过程的方法往往存在局限性.

(下转第 35 页)