doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0006.002

犹豫模糊多属性决策的 M-TOPSIS 法*

李兰平
(湖南财政经济学院 基础课部,长沙 410205)

摘 要:犹豫模糊集由于允许隶属度用几个数值的集合来描述,对于处理决策者对决策的信息表现出犹豫和优柔寡断情形特别适合,成为不确定多属性决策的又一有力工具;针对属性值为犹豫模糊元的多属性决策问题,提出了一种改进的 TOPSIS 决策法——M-TOPSIS 决策法.并通过实际应用例子说明所提出的方法的有效性和实用性.

关键词:犹豫模糊集;多属性决策;M-TOPSIS

中图分类号:151.2 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)06-0007-04

由于客观世界的复杂性和人类知识的局限性,在处理决策问题时,决策者往往很难用精确数来对各个评价方案的属性值给出描述.为弥补精确数的不足,Zadeh 提出了模糊集理论,由于模糊数特别是区间数、三角模糊数等能较好地描述不确定信息.近年来模糊集以及直觉模糊集等已经被广泛应用到诸如人员选择、企业风险项目投资、供应商合作伙伴选择、企业厂址选择等多属性决策问题[1,2].最近,人们发现在很多决策问题中,由于决策者在做决策时常表现出犹豫和优柔寡断的状态,最终导致他们的意见不能达成一致,从而使得最终的决策结果也难以达成一致,而此种情形是前面的模糊数以及直觉模糊数难以较好描述的,为此 Torra 和 Narukawa[3] 提出了一种广义的模糊集——犹豫模糊集,其隶属度是由一列可能的数值组成的集合.针对犹豫模糊多属性问题,文献[4,5]利用算子进行信息集结的方法给出了多属性决策法;文献[6]针对属性值为犹豫模糊元的多属性决策问题,提出了 VIKOR 扩展决策法和 TOPSIS 决策法.犹豫模糊的概念刚被提出不久,针对犹豫模糊多属性决策问题的决策方法还不多见.由于传统的 TOPSIS 法存在着逆序问题以及综合评价值只反映了各评价方案内部的相对接近程度,而不能反映与理想的最优方案的真正接近程度[7-9].为此,针对属性值为犹豫模糊元的多属性决策问题提出一种改进的 TOPSIS 决策法,称为 M-TOPSIS 法.

1 犹豫模糊集的基本概念

定义 1[3,4] 设 X 是一给定集合.集合 $A=\{<x,h_A(x)>|x\in X\}$ 称为定义在 X 上的犹豫模糊集,这里 $h_A(x)$ 为定义在 $x\in X$ 取值为[0,1]上的若干不同数值的集合,其表示元素 x 属于集合 A 的若干种可能的隶属度.为表述方便,文献[4]将 $h_A(x)$ 称为犹豫模糊元.

定义 2[4] 设 h,h_1 和 h_2 为 3 个犹豫模糊元,则其运算法则定义如下:

(1) $h^\lambda=\bigcup_{\gamma\in h}\{\gamma^\lambda\}$;

收稿日期:2014-10-08;**修回日期**:2014-11-03.

* **基金项目**:湖南省科技厅科技项目(2013FJ3083).

作者简介:李兰平(1981-),女,湖南永州人,副教授,硕士,从事模糊多属性决策研究.

(2) $\lambda h=\bigcup_{\gamma\in h}\{1-(1-\gamma)^{\lambda}\}$;

(3) $h_1\cup h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\max\{\gamma_1,\gamma_2\}$;

(4) $h_1\cap h_2=\bigcap_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\min\{\gamma_1,\gamma_2\}$;

(5) $h_1\oplus h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\}$;

(6) $h_1\otimes h_2=\bigcup_{\gamma_1\in h_1,\gamma_2\in h_2}\{\gamma_1\gamma_2\}$.

定义 3[6] 设 h_1 和 h_2 为定义在 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 上的两个犹豫模糊元,则 h_1 和 h_2 之间的规范化 Hamming 距离定义为

$$\|h_1-h_2\|=\frac{1}{l}\sum_{j=1}^{l}|h_{1\sigma(j)}-h_{2\sigma(j)}|$$

其中 $l(h)$ 为模糊结构元 h 中元素的个数.由于多数情况有 $l(h_1)\neq l(h_2)$,故此处定义 $l=\max\{l(h_1),l(h_2)\}$.并且为保证运算进行,需要将元素个数少的模糊结构元 h 进行扩充.具体的办法是将 h 中某元素重复添加.采用文献[6]的做法,如果决策者为风险偏好的,重复添加最大值,如果决策者为风险厌恶的重复添加最小值.例如 $h_1=\{0.2,0.3,0.4\}$,$h_2=\{0.4,0.6\}$,则显然 $l(h_1)>l(h_2)$.则为保证运算进行,需要将 h_2 的元素扩充到与 h_1 的元素个数相同.于是当决策者为风险偏好的,令 $h_2=\{0.4,0.6,0.6\}$;当决策者为风险厌恶的,令 $h_2=\{0.4,0.4,0.6\}$.

在接下来的讨论中,均设决策者为风险厌恶的.

2 犹豫模糊多属性决策的 M-TOPSIS 法

TOPSIS 法是一种应用十分广泛的静态综合评价方法.在实际应用中,TOPSIS 法存在着逆序问题.而且其综合评价值 C_i 只能反映各评价对象内部的相对接近度,并不能反映与理想的最优方案的接近程度;评价值 C_i 区分各评价对象优劣的范围也有局限.鉴于 TOPSIS 法应用的广泛性,有必要对 TOPSIS 法的不足进行改进.文献[8]提出一种新的改进的 TOPSIS 法,称为 M-TOPSIS 方法,不仅具有强保序性,而且比传统 TOPSIS 法灵敏.根据文献[8]的思想,针对属性值为犹豫模糊元的多属性决策问题,提出了基于 M-TOPSIS 法的决策方法,具体计算步骤如下:

步骤 1 基于犹豫模糊元的多属性决策矩阵建立.

对于某一多属性决策问题,设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个待评价的备选方案,$O=\{o_1,o_2,\cdots,o_n\}$ 是属性集.专家们给出了方案 A_i 在属性 o_j 下的属性值 h_{ij}(这里 h_{ij} 为犹豫模糊元),并设相应的属性权重向量为 $w=(w_1,w_2,\cdots,w_n)$,从而构成决策矩阵:

$$\boldsymbol{H}=(h_{ij})_{m\times n}=\begin{array}{c} \\ A_1\\ A_2\\ \vdots\\ A_m\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} o_1 & o_2 & \cdots & o_n\end{array}\\ \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n}\\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ h_{m1} & h_{m2} & \cdots & h_{mn}\end{pmatrix}\end{array}$$

步骤 2 定义正、负理想解[6].

正理想解 A^* 定义为 $A^*=\{h_1^*,h_2^*,\cdots,h_n^*\}$,其中 $h_j^*=\bigcup_{i=1}^{m}h_{ij}=\bigcup_{\substack{\gamma_{ij}\in h_{ij},\\ i=1,2,\cdots,m}}\max\{\gamma_{1j},\gamma_{2j},\cdots,\gamma_{mj}\}$,$j=1,2,\cdots,n$;

负理想解 A^- 定义为 $A^-=\{h_1^-,h_2^-,\cdots,h_n^-\}$,其中 $h_j^-=\bigcap_{i=1}^{m}h_{ij}=\bigcap_{\substack{\gamma_{ij}\in h_{ij},\\ i=1,2,\cdots,m}}\min\{\gamma_{1j},\gamma_{2j},\cdots,\gamma_{mj}\}$,$j=1,2,\cdots,n$.

步骤 3 分别计算方案 A_i 到正理想解 A^* 和负理想解 A^- 的距离.

方案 A_i 到正理想解 A^* 的加权距离定义为

$$d_i^+ = \sum_{j=1}^{n} w_j \| h_{ij} - h_j^* \|$$

方案 A_i 到负理想解 A^- 的加权距离定义为

$$d_i^- = \sum_{j=1}^{n} w_j \| h_{ij} - h_j^- \|$$

步骤 4 建立 D^+oD^- 坐标平面,以 oD^+ 作为 x 轴,以 oD^- 作为 y 轴.备选方案点 A_i 用此坐标面上的点(D_i^+, D_i^-)来表示.令 $(D^+,D^-)=(\min_i\{D_i^+\},\max_i\{D_i^-\})$ 对应的方案为最优参考方案 A.则备选方案 A_i 与最优参考方案 A 的欧氏距离为

$$d(A_i,A)=\sqrt{(D_i^+ - D^+)^2 + (D_i^- - D^-)^2}$$

步骤 5 根据 $d(A_i,A)$ 从小到大的顺序对备选方案进行排序和择优.$d(A_i,A)$ 越小方案越优.若出现两个方案 x_i 和 x_j,$(i\neq j)$ 使得 $d(A_i,A)=d(A_j,A)$.则令 B 为次优参考方案,对应的次优参考点为 $(D^+,D^-)=(\min_i\{D_i^+\},\min_i\{D_i^-\})$,此时计算

$$c(A_i,A)=\sqrt{(D_i^+ - \min_i\{D_i^+\})^2 + (D_i^- - \min_i\{D_i^-\})^2}$$

取 $c(A_i,A)$ 值较小的评价对象为较优,即在评价方案与最优参照点 A 等距离的情况下,则选择与次优参照点 B 相对距离较近的点为较优.

3 应用实例

为说明所提出的方法的有效性和可行性,采用文献[6]的例子进行说明.设某公司的董事会想在未来 5 年内投资某大型项目,经过初期调研和讨论确定了 4 个备选的投资项目 A_1,A_2,A_3,A_4,有 4 个评价指标(属性),分别为金融前景 o_1;顾客满意度 o_2,商业国际化角度 o_3;学习和成长力 o_4.这 4 种属性的权重向量 $w=(0.2,0.3,0.15,0.35)$.为避免董事会成员的相互影响,成员以匿名的形式给出他们的属性偏好,最终得到表 1 所示的犹豫模糊决策信息.

表 1 犹豫模糊决策矩阵

	o_1	o_2	o_3	o_4
A_1	{0.2,0.4,0.7}	{0.2,0.6,0.8}	{0.2,0.3,0.6,0.7,0.9}	{0.3,0.4,0.5,0.7,0.8}
A_2	{0.2,0.4,0.7,0.9}	{0.1,0.2,0.4,0.5}	{0.3,0.4,0.6,0.9}	{0.5,0.6,0.8,0.8}
A_3	{0.3,0.5,0.6,0.7}	{0.2,0.4,0.6}	{0.3,0.5,0.7,0.8}	{0.2,0.5,0.6,0.7}
A_4	{0.3,0.5,0.6}	{0.2,0.4}	{0.5,0.6,0.7}	{0.8,0.9}

下面利用所提出的 M-TOPSIS 法对备选方案进行排序和择优.

步骤 1 确定正、负理想解.

正理想解 $A^*=\{h_1^*,h_2^*,h_3^*,h_4^*\}=\{0.9,0.8,0.9,0.9\}$;

负理想解 $A^-=\{h_1^-,h_2^-,\cdots,h_n^-\}=\{0.2,0.1,0.2,0.2\}$.

步骤 2 计算备选方案 A_i 与最优参考方案 A 的欧氏距离分别为

$$d(A_1,A)=0.070\,6, d(A_2,A)=0.061\,3, d(A_3,A)=0.119\,6, d(A_4,A)=0$$

步骤 3 按照 $d(A_i, A)$ 从小到大的顺序,得到最优的投资项目为 A_4,且总的优劣排序为 $A_4 > A_2 > A_1 > A_3$.这也恰与文献[6]中采用 TOPSIS 方法得到的.

4 结 论

针对目前经常出现的多个决策者在进行重大决策时意见不统一,经常表现出犹豫和优柔寡断状态.犹豫模糊集理论在此背景下被提出,但是针对属性值为犹豫模糊元的多属性决策问题的研究还不多见,提出了一种新的多属性决策方法——M-TOPSIS 法.并通过应用实例说明了所提出的方法的可行性和有效性.决策方法运算简单,便于利用 Matlab 等语言进行模块化操作.

参考文献:

[1] 卫贵武.基于投影的直觉模糊数多属性决策方法[J].管理学报,2009(9):1154-1156
[2] 刘希梅,孙少华,么慧慧,等.基于三角模糊层次分析法的教学质量评价研究[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2013,30(8):45-49
[3] TORRA V,NAEUKAWA Y.On Hesitant Fuzzy Sets and Decision,in:The 18th IEEE International Conference on Fuzzy Systems[J].Island Korea,2009,21:1378-1382.
[4] XU Z S, XIA M M. Hesitant Fuzzy Information Aggregation in Decision Making[J]. International Journal of Approximate Reasoning,2011,52(3):395-407
[5] WEI G W.Hesitant Fuzzy Prioritized Operators and Their Application to Multiple Attribute Decision Making[J].Knowledge-Based Systems,2012,31:176-182
[6] ZHANG N, WEI GW. Extension of Vikor Method for Decision Making Problem Based on Hesitant Fuzzy Set[J]. Applied Mathematical Modeling,2013,37(7):4938-4947
[7] 俞立平,潘云涛,武夷山.修正 TOPSIS 及其在科技评价中的应用研究[J].情报杂志,2012,31(6):103-107
[8] 王一任,任力锋,陈丽文,等.一种新的改良 TOPSIS 法及其医学应用[J].中南大学学报:医学版,2013,38(2):196-201
[9] 赵萌,邱菀华,刘北上.基于相对熵的多属性决策排序方法[J].控制与决策,2010,25(7):1098-1100

Hesitant Fuzzy Multi-Attribute Decision-making Based on M-TOPSIS Method

LI Lan-ping

(Department of Basic Subjects, Hunan University of Finance and Economics, Changsha 410205, China)

Abstract: Because membership degree can be described by a set of several numerical values, hesitant fuzzy set is very suitable to deal with the decision problem with decision makers having hesitant attitude, and it becomes another powerful tool for multiple attribute decision making. For the attribute value is multiple attribute decision-making problem of hesitant fuzzy elements, an improved TOPSIS decision method is proposed, named M-TOPSIS method. Finally a practical example is given to illustrate the validity and practicability of the proposed method.

Key words: hesitant fuzzy set; multi-attribute decision-making; M-TOPSIS