doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.015

关于有限集[n]及其子集若干性质的讨论*

程 杰[1], 杨冬苹[2]
(1.重庆师范大学 数学学院,重庆 401331;2.重庆市秀山高级中学,重庆 409900)

摘 要:有限集由于有有限多个子集,因而具有许多无限集合所不具有的性质;从 n 元有限集的所有 k 元子集元素和入手,得到了 n 元有限集的全体子集元素和 S_n 的计数公式,以及所有 k 阶子集的元素和 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 的计数公式以及单峰性质和其他一些推论.

关键词:计数公式;有限集;有限子集;二项式系数
中图分类号:O175 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)05-0052-03

有限集合由于具有有限个子集,因而具有许多无限集合不可比拟的性质.众所周知,有限集合及其子集与组合数学有着非常紧密的联系.首先,有限集的所有子集的元素和就是一个组合数学范畴的问题;再者,其各阶子集的元素和之比与二项式系数有着完美的吻合.通过上述对有限集的讨论,可以得到一系列的结论.

1 相关性质

定义 1 记$[n]=\{1,2,3,\cdots,n\}$,$n\in\mathbf{N}$,$[n]$的所有子集的元素和为 S_n,$[n]$的所有 k 阶子集的元素和为 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$(这里的 k 阶子集指的是该集合包含有$[n]$中的 k 个元素),自然的,有 $S_{n,0}=0$,显然,有 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_{n,k}$.

定理 1[1] 集合$[n]$的子集个数为 2^n.

证明 令 $2^{[n]}$表示$[n]$的所有子集组成的集合,再令$\{0,1\}^n=\{(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n):\varepsilon_i=0$ 或 $1\}$.因为每个 ε_i 有两种可能的取值,所以有 $\mathrm{card}(\{0,1\}^n)=2^n$.定义映射 $\theta(T)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$,其中

$$\varepsilon_i=\begin{cases}1,若\ x_i\in T\\0,若\ x_i\notin T\end{cases}$$

容易看出 θ 是一个双射.于是就证明了集合$[n]$的子集个数为 2^n.

定理 2[1] 集合$[n]$的 k 阶子集的个数$\dbinom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$.

证明 考虑用两种方法来计数.从 n 元集合 S 中取出一个 k 元子集 T,然后把 T 中的元素按线性排序的方法数 $N(n,k)$.首先,有$\dbinom{n}{k}$种方法选择 T,然后有 k 种方法从 T 中选择一个元素作为排序的第一个元素,再

收稿日期:2014-09-20;**修回日期**:2014-10-09.
* **基金项目**:重庆市自然科学基金(2011jjA00003).
作者简介:程杰(1990-),男,重庆开县人,硕士,从事微分方程与动力系统研究.

从 $k-1$ 种方法选出一个元素作为排序的第二个元素,以此类推.因此 $N(n,k)=\binom{n}{k}k!$.

另一方面,这里有 n 种方法从 S 中选出一个元素作为排序的第一个元素,然后再有 $n-1$ 种方法从剩下的元素中选出一个元素作为排序的第二个元素,以此类推,直至有 $n-k+1$ 种方法从剩下的元素中选出一个元素作为排序的第 k 个元素.这样就有

$$N(n,k)=n(n-1)\cdots(n-k+1)$$

于是,就得到 $\binom{n}{k}=\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}$.

定理 3[2-3]　假设 n 是正整数,二项式系数列 $\binom{n}{0},\binom{n}{1},\binom{n}{2},\cdots,\binom{n}{n}$ 具有单峰性.即若 n 是偶数,$\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\frac{n}{2}},\binom{n}{\frac{n}{2}}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}$;若 n 是奇数,则有 $\binom{n}{0}<\binom{n}{1}<\cdots<\binom{n}{\frac{(n-1)}{2}}=\binom{n}{\frac{(n+1)}{2}}>\cdots>\binom{n}{n-1}>\binom{n}{n}$.

证明　利用定理 2,对于正整数 $k(1\leqslant k\leqslant n)$,有

$$\frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k-1}}=\frac{\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}}{\dfrac{n!}{(k-1)!\ (n-k+1)!}}=\frac{n-k+1}{k}$$

因此,$\binom{n}{k-1}<\binom{n}{k}$,$\binom{n}{k-1}=\binom{n}{k}$,或者 $\binom{n}{k-1}>\binom{n}{k}$,根据 $k<n-k+1$,$k=n-k+1$,或者 $k>n-k+1$ 而定.再对 n 分奇偶性讨论即可.

2　结　论

性质 1　集合[n]的所有子集的元素和为 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 2^{n-1}$.

证明　对于元素 $j(1\leqslant j\leqslant n)$,分为属于集合[$n$]的某一子集或者不属于集合[$n$]的所有子集 2 种情况.而元素 j 不属于集合[n]的所有子集共有 2^{n-1} 种情况(这相当于集合[n]$\backslash j$ 的所有子集的个数),即元素 j 在集合[n]的子集中共出现 $2^n-2^{n-1}=2^{n-1}$ 次.当 j 遍历 1 到 n 的所有正整数时,就得到集合[n]的所有子集的元素和为

$$S_n=(1+2+3+\cdots+n)\cdot 2^{n-1}=\frac{n(n+1)}{2}\cdot 2^{n-1}$$

性质 2　类似于二项式系数列,集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}$ 构成的序列也具有单峰性:当 n 是偶数时,集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 中最大的是 $S_{n,\frac{n}{2}}$ 和 $S_{n,\frac{n}{2}+1}$;当 n 是奇数时,集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 中最大的是 $S_{n,\frac{n}{2}+1}$.

证明　类似于性质 1,易知集合[n]的所有 k 元子集的元素和为 $S_{n,k}=\dfrac{k\binom{n}{k}}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$(因为集合[$n$]的所有 k 元子集共有 $k\binom{n}{k}$ 个元素,每个元素在[n]的子集中出现 $k\dfrac{\binom{n}{k}}{n}$ 次),化简得

$$S_{n,k}=\frac{k\binom{n}{k}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{k\dfrac{n!}{k!\ (n-k)!}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

再利用定理 3,可知当 n 是偶数时,集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 中最大的是 $S_{n,\frac{n}{2}}$ 和 $S_{n,\frac{n}{2}+1}$;当 n 是奇数时,集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}(k=0,1,2,\cdots,n)$ 中最大的是 $S_{n,\frac{n}{2}+1}$.

性质 3 集合[n]的所有 k 元子集的元素和 $S_{n,k}$ 之比为其低一阶的二项式系数列 $\binom{n-1}{k}$,其中,$0\leqslant k\leqslant n-1$.

证明 由性质 2 可得,集合[n]的所有 k 元子集的元素和为

$$S_{n,k}=\frac{k\binom{n}{k}}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\binom{n-1}{k-1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

因而 $\dfrac{S_{n,k+1}}{S_{n,k}}=\dfrac{\binom{n-1}{k}}{\binom{n-1}{k-1}}$.即证结论.

推论 1 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$.

证明 由性质 1 可知, 集合[n]的所有子集的元素和为 $S_n=\dfrac{n(n+1)}{2}\cdot 2^{n-1}$;而集合[$n$]的所有 k 元子集的元素和为 $S_{n,k}=\dfrac{k\binom{n}{k}}{n}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2}$.由于 $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n}S_{n,k}$,将 S_n 和 $S_{n,k}$ 的表达式代入即得 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$;这就给出组合恒等式 $\sum\limits_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}=n\cdot 2^{n-1}$ 的一种组合证明.

参考文献:

[1] STANLEY P.计数组合学[M].付梅,等译.北京:高等教育出版社,2009

[2] 李乔.组合学讲义[M].北京:高等教育出版社,2008

[3] 曹汝成.组合数学[M].广州:华南理工大学出版社,2012

Discussion on the Nature of the Finite Set [n] and Its Subsets

CHENG Jie[1] ,Yang Dong-Ping[2]

(1.College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China;
2.Chongqing Xiushan High School, Chongqing 409900,China)

Abstract: Because finite set contains limited subsets, it has many properties infinite set doesn't have. This paper begins with the sum of all elements of subsets with k elements in finite set with n elements, gains calculating formula for S_n, the sum of all elements of subsets in finite set with n elements, and gets calculating formula for $S_{n,k}$ $(k=0,1,2,\cdots,n)$, the sum of all elements of subsets with k order as well as unimodal nature and some other inferences.

Key words: counting formula; finite set; limited subset; binomial coefficients