第 32 卷第 5 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 5 月
Vol. 32　NO.5　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　May.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.014

逆极限空间转移映射非游荡集的中心测度*

贺　毅, 张　君, 白丹莹
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:证明了关于 X 的逆极限空间的转移映射具有下述结论:转移映射的强非游荡点集等于映射 f 的强非游荡点集的逆极限空间;f 在测度中心上为非游荡点集,当且仅当转移映射的测度映射在其测度中心为非游荡点集;f 在测度中心上为强非游荡点集,当且仅当转移映射的测度映射在其测度中心为强非游荡点集.

关键词:逆极限空间;转移映射;非游荡点;强非游荡点;测度中心

中图分类号:O189　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)05-0049-03

若 X 为紧致度量空间,$f:X\to X$ 连续,X 的逆极限空间为形如 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 的点构成的集合,其中 $f(x_{i+1})=x_i,i\geqslant 0$.引入度量 $D(\bar{x},\bar{y})=\sum\limits_{i=0}^{n}\dfrac{d(x_i,y_i)}{2^i}$,其中 d 为 X 上的度量.用 $\underleftarrow{\lim}(X,f)$ 表示 X 的逆极限空间.转移映射 $\sigma:\underleftarrow{\lim}(X,f)\to\underleftarrow{\lim}(X,f)$ 定义为 $\sigma(x_0,x_1,x_2,\cdots)=(f(x_0),x_1,x_2,\cdots)$,注意这里 σ 与单边符号空间的转移映射不同,显然 σ 是同胚.投射 $\pi_i:\underleftarrow{\lim}(X,f)\to X$ 定义是 $\pi_i(x_0,x_1,x_2,\cdots)=x_i,i=0,1,2,\cdots$.$\underleftarrow{\lim}(X,f)$ 的拓扑由 D 诱导且 $\underleftarrow{\lim}(X,f)$ 是紧致的.

1992 年,周作领在文献[1]中讨论了弱几乎周期点和测度中心;1995 年,顾荣宝在文献[2]中讨论了逆极限空间上的移位映射的混沌性;1998 年马东魁在文献[3]中讨论了 Schweizer-Smital 混沌与测度的关系.此处在前人的基础上对非游荡点集和强非游荡点集进行讨论,主要讨论了非游荡点和强非游荡点在逆极限转移映射的性质.文中出现与这些概念相关符号及记法分别与上述对应的文献相同.

定理 1[3]　若 $f:X\to X$ 连续,则 $M(\sigma)=\underleftarrow{\lim}(M(X),f)$.

1　基本概念

定义 1　设 X 是紧致度量空间,点 $x\in X$ 称为 f 的非游荡点,如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists n\in\mathbf{N}+$, $\exists y$ 使得 $d(x,y)<\varepsilon$,有 $d(f(y),x)<\varepsilon$.f 的全体非游荡点组成的集合记 $\Omega(f)$.

定义 2　称 $x\in X$ 为 f 的强非游荡点,如果对 $\forall\varepsilon>0$ 存在 $y\in X$,使得

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\mid d(f^i(y),x)<\varepsilon,0\leqslant i\leqslant n-1\}>0$$

这里#{·}表示集合的基数. f 的强非游荡点集合也叫强非游荡集,记作 $S\Omega(f)$.

收稿日期:2014-10-04;**修回日期**:2014-11-20.
***基金项目**:2013 年重庆高校创新团队建设计划资助项目(KJPB201308).
作者简介:贺毅(1992-),女,重庆云阳人,硕士研究生,从事拓扑动力系统研究.

2 主要结果

引理 1 若 $f:X\to X$ 为连续满射,则 $\Omega(\sigma_f)=\varprojlim\{\Omega(f),f\}$.

证明 必要性:对任意 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in\varprojlim\Omega(f)$,都有 $x_i\in\Omega(f)$,$i=0,1,2,\cdots$.对任意 $\varepsilon>0$,令 $M>0$ 为紧致度量空间 X 的直径,即有

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{M}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

因为 $x_i\in\Omega(f)$,$i=0,1,2,\cdots$,则由 $\Omega(f)$ 的定义可知,存在 $y_i\in X$ 及 $m\in Z^+/\{0\}$,使得 y_i,$f^m(y_i)$ 与 x_i 充分小. 即有

$$d(y_i,x_i)<\frac{\varepsilon}{4}\tag{1}$$

$$d(f^m(y_i),x_i)<\frac{\varepsilon}{4}\tag{2}$$

由式(1)可得

$$D(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(y_i,x_i)}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\cdots<\varepsilon$$

由 $\sigma^m(x)=(f^m(x_0),\cdots,f(x_0),x_0,x_1,\cdots)$,可由式(2)得

$$D(\sigma^m(\bar{x}),\bar{y})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}=\sum_{i=0}^{m}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}=$$
$$\sum_{i=0}^{m}\frac{\varepsilon/4}{2^i}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以对任意 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$,存在 $\bar{y}=(y_0,y_1,y_2,\cdots)$ 使得 $D(\bar{x},\bar{y})<\varepsilon$,有 $D(\sigma^m(\bar{x}),\bar{y})<\varepsilon$.

故 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 为 $\varprojlim(X,f)$ 的非游荡点集.

充分性:对任意 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in\varprojlim\Omega(f)$,存在 $\bar{y}=(y_0,y_1,y_2,\cdots)\in\varprojlim\Omega(f)$.由 $D(\bar{x},\bar{y})=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{d(y_i,x_i)}{2^i}<\varepsilon$,即 $d(y_i,x_i)<\varepsilon$,$i=0,1,2,\cdots$.

对上述的 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)$ 和 $\bar{y}=(y_0,y_1,y_2,\cdots)$,有 $\pi_0(\bar{x})=x_0$,$\pi_0(\bar{y})=y_0$. 由 $D(\sigma^m(\bar{x},\bar{y}))=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}<\varepsilon$,即有 $d(f^m(y_0),x_0)<\varepsilon$,由 x_0 的任意性可得 $\bar{x}\in\Omega(f)$.

证毕.

定理 2 若 $f:X\to X$ 为连续,$S\Omega(\sigma_f)=\varprojlim\{S\Omega(f),f\}$.

证明 必要性:对任意 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in\varprojlim S\Omega(f)$,则 $x_i\in S\Omega(f)$,$i=0,1,2,\cdots$.由 X 是紧致的,设其直径为 $M>0$,对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $m\in Z^+/\{0\}$,使

$$\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{M}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}$$

由于 $x_i\in S\Omega(f)$,对上述的 $\varepsilon>0$,存在 $\bar{y}=(y_0,y_1,y_2,\cdots)$ 中的 y_i,使得当 $d(y_i,x_i)<\frac{\varepsilon}{4}$ 时,有 $d(f^m(y_i),x_i)<\frac{\varepsilon}{4}$.

由 $d(y_i,x_i)<\frac{\varepsilon}{4}$,则有

$$D(\bar{x},\bar{y})=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(y_i,x_i)}{2^i}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{4}+\cdots<\varepsilon$$

由 $\sigma^m(x)=(f^m(x_0),\cdots,f(x_0),x_0,x_1,\cdots)$,得

$$D(\sigma^m(\bar{x}),\bar{y}))=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}=\sum_{i=0}^{m}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}+\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{d(f^m(y_i),x_i)}{2^i}<\varepsilon$$

所以 $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\mid D(\sigma^i(\bar{y}),\bar{x})<\varepsilon,0\leqslant i\leqslant n-1\}>0$,故 $\bar{x}\in S\Omega(f)$.

充分性:对任意 $\bar{x}=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in S\Omega(\sigma)$,由 $S\Omega(\sigma)$ 的定义可知,存在 $\bar{y}=(y_0,y_1,y_2,\cdots)\in S\Omega(f)$ 使得 $D(\bar{x},\bar{y})=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\frac{d(y_i,x_i)}{2^i}<\varepsilon$.即 $d(y_i,x_i)<\varepsilon,i=0,1,2,\cdots$,有

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\mid D(\sigma^i(\bar{y}),\bar{x})<\varepsilon,0\leqslant i\leqslant n-1\}>0$$

由 $D(\sigma^i(\bar{y}),\bar{x})<\varepsilon$,于是 $d(f^i(y),x)<D(\sigma^i(\bar{y}),\bar{x})<\varepsilon$,故

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\#\{i\mid D(f^i(y),x)<\varepsilon,0\leqslant i\leqslant n-1\}>0$$

所以 $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots)\in\varprojlim(S\Omega(f),f)$.

证毕.

定理 3　若 $f|_{M(f)}:M(f)\to M(f)$ 是非游荡集,当且仅当 $\sigma|_{M(\sigma)}:M(\sigma)\to M(\sigma)$ 是非游荡集,其中,

$$M(\sigma)=\varprojlim(M(X),f)$$

证明　结合定义 1 定理 1 立即可证.

定理 4　若 $f|_{M(f)}:M(f)\to M(f)$ 是强非游荡集,当且仅当 $\sigma|_{M(\sigma)}:M(\sigma)\to M(\sigma)$ 是强非游荡集.

证明　按照定理 3 的方式可以证明定理 4.

参考文献:

[1] 周作领. 弱几乎周期点与中心测度[J]. 中国科学（A 辑）, 1992（6）:572-581

[2] 顾荣宝.逆极限空间上移位映射的拓扑熵与混沌[J].武汉大学学报:自然科学版,1995,41(2):22-26

[3] 马东魁.关于逆极限空间转移映射的性质[J].中山大学:自然科学版,1997,37(2)37-42

[4] 廖公夫,王立冬,范钦杰.映射迭代与混沌动力系统[M].北京:科学出版社,2013

Measurement of the Center of the Inverse Limit Space Transition Mapping None-wandering Set

HE Yi, ZHANG Jun, BAI Dan-ying

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Conclusions of transition mapping of the inverse limit space of X is proved as follow: (1) Strong none-wandering set of transition mapping equals the inverse limit space of strong none-wandering point set of mapping f. (2) f on the measure center is a non-wandering point set, if and only if the measure mapping of transition mapping is non-wandering point set on its measure center. f on the measure center is a strong non-wandering point set, only if the measure mapping of transition mapping is strong non-wandering point set on its measure center.

Key words: inverse limit space; transition mapping; non-wandering point; strong non-wandering point; measure center