第 32 卷第 5 期　　重庆工商大学学报(自然科学版)　　2015 年 5 月
Vol. 32　NO.5　　J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed)　　May.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.012

# 等幂和问题的对称理想参数解

邱　敏
(西南大学 数学与统计学院,重庆 400715)

**摘　要**:介绍了等幂和问题的一些研究历史,给出了等幂和问题 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^j(j=1,2,\ldots,n-1)$ 在 $n=4,5,6$ 时的对称理想解的参数形式.

**关键词**:等幂和问题;理想解;参数解
**中图分类号**:O156.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)05-0040-03

## 1　研究背景介绍

关于等幂和问题的研究已经有两百多年的历史了[1],在 1750-1751 年,Euler 和 Goldbach 注意到,$[a,b,c,abc]=_2[a+b,a+c,b+c]$.一个世纪后,1851 年,Prouhet 发现有 $n^{k+1}$ 个整数可以分成 $n$ 个集合,使得每对集合恰好是长度为 $n^k$,度数为 $k$ 的一个解,但 Prouhet 的结果一直没被关注.等幂和问题也被称为 Tarry-Escott problem,直到 Wright 在文献[2]中提出 Prouhet 的贡献之后,该问题被称为 Prouhet-Tarry-Escott problem.等幂和问题从代数和分析两个方面来看非常有趣,而其中理想解的讨论因其与计算机科学理论及组合学[3]中问题的联系又显得格外有趣.

Wright 在 1934 年猜想:对所有的正整数 $n$,总可以找到一个长度为 $n$ 的理想解.但这个猜想并没有被证明.对 $n=2,3,4,5$,全部的参数解已经找到了;$n=6,7,8$ 的部分参数解也找到了;$n=9$ 时,只有两个不等价解被发现;$n=10$ 时,无限组不等价解也找到了;到 2008 年时也只有两组 $n=12$ 的不等价解,$n=11$ 和 $n\geqslant 13$ 还没有理想解被发现.

等幂和问题是一个经典的丢番图方程,所谓“等幂和”,即给定自然数 $n,k,k<n$,找到整数集 $\mathbf{Z}$ 的两个不同子集 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$,使得对 $j=1,2,\cdots,k$,有 $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^j$,即

$$\begin{gathered}\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n\\ \alpha_1^2+\alpha_2^2+\cdots+\alpha_n^2=\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_n^2\\ \cdots\\ \alpha_1^k+\alpha_2^k+\cdots+\alpha_n^k=\beta_1^k+\beta_2^k+\cdots+\beta_n^k\end{gathered}$$

简记为 $[\alpha_i]=_k[\beta_i]$,其中,$n$ 为解的长度,$k$ 为解的度数.当 $k=n-1$ 时,等幂和问题有最大的非平凡解,称 $[\alpha_i]=_{n-1}[\beta_i]$ 为它的理想解,将等幂和问题的解 $[\alpha_i]=_k[\beta_i]$ 的参数形式称为它的参数解.

除了从方程的角度来研究等幂和之外,也可以从多项式的角度研究它.

**定理 1**[4]　由牛顿公式可得 3 个命题等价:

1) $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^j,j=1,2,\cdots,k$;

2) $\deg\left(\prod_{i=1}^{n}(x-\alpha_i)-\prod_{i=1}^{n}(x-\beta_i)\right)\leqslant n-(k+1)$;

**收稿日期**:2014-09-16;**修回日期**:2014-10-16.

**作者简介**:邱敏(1991-),女,四川遂宁人,硕士研究生, 从事计算数论研究.

3) $(x-1)^{k+1} \mid \sum_{i=1}^{n} x^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{\beta_i}$.

其中,由定理 1 命题 3) 可知,等幂和问题也可从多项式的角度来定义,即找到一个整系数多项式 $F(x)$,使得 $F(x)$ 的长度最小且能被 $(x-1)^{k+1}$ 整除.

称满足形式 $[\pm\alpha_1,\cdots,\pm\alpha_{n/2}] =_{n-1} [\pm\beta_1,\cdots,\pm\beta_{n/2}]$ 的等幂和问题的解为长度为 $n$ 的偶理想对称解,则有

**推论 1**[4]　由定理 1 可得,以下 3 个命题等价:

1) $\sum_{i=1}^{n/2} \alpha_i^{2j} = \sum_{i=1}^{n/2} \beta_i^{2j}, j=1,2,\cdots,\frac{n-2}{2}$;

2) $\prod_{i=1}^{n/2} (x^2-\alpha_i^2) - \prod_{i=1}^{n/2} (x^2-\beta_i^2) = C$,其中 $C$ 为常数;

3) $(1-x)^n \mid \sum_{i=1}^{n/2} (x^{\alpha_i}+x^{-\alpha_i}) - \sum_{i=1}^{n/2} (x^{\beta_i}+x^{-\beta_i})$.

同样地,称满足形式 $[\alpha_1,\cdots,\alpha_n] =_{n-1} [-\alpha_1,\cdots,-\alpha_n]$ 的等幂和问题的解为长度为 $n$ 的奇理想对称解,则有

**推论 2**[4]　由定理 1 可得,以下 3 个命题等价:

1) $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{j} = 0, j=1,3,5,\cdots,n-2$;

2) $\prod_{i=1}^{n} (x-\alpha_i) - \prod_{i=1}^{n} (x+\alpha_i) = C$,其中 $C$ 为常数;

3) $(1-x)^n \mid \sum_{i=1}^{n} x^{\alpha_i} - \sum_{i=1}^{n} x^{-\alpha_i}$.

由等幂和问题的定义可知,一个解可以生成一组解,即

**引理 1**[4]　若 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$ 是一个次数为 $k$ 的解,则 $[M\alpha_1+K, M\alpha_2+K,\cdots,M\alpha_n+K]$,$[M\beta_1+K, M\beta_2+K,\cdots,M\beta_n+K]$ 也是一个次数为 $k$ 的解,其中 $M,K$ 为任意常数,称这样的两个解为等价解.

对给定的 $n$,可以由次数为 $k$ 的解构造一个次数为 $k+1$ 的解.即

**引理 2**[4]　若 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n]$,$[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$ 是一个次数为 $k$ 的解,则 $[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\beta_1+h,\beta_2+h,\cdots,\beta_n+h]$,$[\alpha_1+h,\alpha_2+h,\cdots,\alpha_n+h,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n]$ 是一个次数为 $k+1$ 的解,其中 $h$ 为任意常数.

## 2　等幂和问题的对称理想参数解

Jack Chernick 在文献[5]中给出了长度 $n=2,3,\cdots,8$ 的对称参数解,此处在此基础上,给出了寻找 $n=4,5,6$ 时的对称理想解的另一种方法,并根据这种方法得出了一些不同的参数解.在以下讨论中,$a,b$ 为任意的整数.

由推论 2 可知,长度为 3 的对称理想解可以由方程 $x_1+x_2+x_3=0$ 给出,该方程的二阶齐次参数解可以表示为 $x_1=-a, x_2=-b, x_3=a+b$,则 $[a+b,-a,-b] =_2 [-(a+b),a,b]$ 为 $n=3$ 的一个对称理想参数解.

由引理 2 及 $n=3$ 的对称理想解的参数形式可得

$$[a+b,-a,-b,-(a+b)+h,a+h,b+h] = {}_3[a+b+h,-a+h,-b+h,-(a+b),a,b] \tag{1}$$

取 $h=a-b$,则式(1)可化为

$$[a+b,-a,-2b,2a-b] =_3 [2a,a-2b,-(a+b),b] \tag{2}$$

对式(2)应用引理 1,取 $M=2, K=-(a-b)$,得

$$[\pm(3a-b),\pm(a+3b)] =_3 [\pm(3a+b),\pm(a-3b)] \tag{3}$$

即式(3)是长度为 4 的一个二阶齐次对称理想参数解.

设长度为 4 的对称理想参数解 $[\pm\alpha_1,\pm\alpha_2] =_3 [\pm\beta_1,\pm\beta_2]$,其中

$$\alpha_1 = ab+a+b-1, \alpha_2 = ab-a-b-1, \beta_1 = ab+a-b+1, \beta_2 = ab-a+b+1 \tag{4}$$

同样由引理 2 可得

$$[\alpha_1,\alpha_2,-\alpha_1,-\alpha_2,\beta_1+h,\beta_2+h,-\beta_1+h,-\beta_2+h] = {}_4[\alpha_1+h,\alpha_2+h,-\alpha_1+h,-\alpha_2+h,\beta_1,\beta_2,-\beta_1,-\beta_2] \tag{5}$$

取 $h=-2ab-2$,则式(5)可化为

$$[ab+a+b-1,ab-a-b-1,-ab-a-b+1,-ab+a+b+1,-3ab+a-b-3,-3ab-a+b-3]=_4[ab+a-b+1,ab-a+b+1,-ab+a+b-3,-ab-a-b-3,-3ab-a-b-1,-3ab+a+b-1] \quad (6)$$

若在式(5)中取$-ab-a-b+1=-ab+a+b-3$,则 $b=-a+2$,式(6)可化为

$$[-a^2+2a+1,-a^2+2a-3,a^2-2a+3,3a^2-4a-5,3a^2-8a-1]=_4[-a^2+3,-a^2+4a-1,a^2-2a-5,3a^2-6a-3,3a^2+6a+1] \quad (7)$$

对式(7)应用引理 1,取 $M=1/2$,$K=-(a^2-2a-1)/2$,得

$$[-a^2+2a+1,-a^2+2a-1,2,a^2-a-2,a^2-3a]=_4[a^2-2a-1,a^2-2a+1,-2,-a^2+a+2,-a^2+3a] \quad (8)$$

则式(8)是长度为 5 的一个一阶非齐次对称理想参数解,且由式(8),可以生成一个长度为 5 的二阶齐次对称理想参数解:

$$[-a^2+2ab+b^2,-a^2+2ab-b^2,2b^2,a^2-ab-2b^2,a^2-3ab]=_4[a^2-2ab-b^2,a^2-2ab+b^2,-2b^2,-a^2+ab+2b^2,-a^2+3ab] \quad (9)$$

若在式(5)中取$-3ab+a-b-3=ab-a+b+1$,则 $b=(a-1)/(2a+1)$,式(6)等价于

$$\left[\frac{3a^2-2a-3}{2a+1},\frac{-a^2-6a+1}{2a+1},\frac{-3a^2+2a+3}{2a+1},\frac{a^2+6a-1}{2a+1},\frac{-5a^2-5}{2a+1}\right]=_4\left[\frac{3a^2+3}{2a+1},\frac{a^2-2a-5}{2a+1},\frac{-3a^2-6a-1}{2a+1},\frac{-5a^2+2a+1}{2a+1},\frac{-a^2+6a-3}{2a+1}\right] \quad (10)$$

对式(10)应用引理 1,取 $M=(2a+1)/2$,$K=(a^2+1)/2$ 得

$$[2a^2-a-1,-3a+1,-a^2+a+2,a^2+3a,-2a^2-2]=_4[-2a^2+a+1,3a-1,a^2-a-2,-a^2-3a,2a^2+2] \quad (11)$$

式(11)是长度为 5 的一个对称理想参数解,且由式(11),可以生成一个长度为 5 的二阶齐次对称理想参数解:

$$[2a^2-ab-b^2,-3ab+b^2,-a^2+ab+2b^2,a^2+3ab,-2a^2-2b^2]=_4[-2a^2+ab+b^2,3ab-b^2,a^2-ab-2b^2,-a^2-3ab,2a^2+2b^2] \quad (12)$$

对式(12)再应用引理 2 及引理 1,取 $h=-2a^2-2ab+2b^2$,$M=1$,$K=a^2+ab-b^2$,则式(12)可化为

$$[\pm(a^2-ab+3b^2),\pm(3a^2-2b^2),\pm(2a^2+4ab-b^2)]=_5[\pm(3a^2+ab+b^2),\pm(2a^2-3b^2),\pm(a^2+4ab-2b^2)] \quad (13)$$

即式(13)是长度为 6 的一个二阶齐次对称理想参数解.

**参考文献:**


[1] BORWEIN P. Computational Excursions in Analysis and Number Theory [M]. New York: Springer-Verlag, 2002

[2] WRIGHT E M. Prouhet's 1851 Solution of the Tarry-Escott Problem of 1910 [J]. Amer Math Monthly,1959(66):199-201

[3] 陈景润,黎鉴愚. 关于等幂和问题 [J]. 科学通报,1985,30(4):316-317

[4] BORWEIN P, INGALLS C. The Prouhet-Tarry-Escott Problem Revisited [J]. Enseign, Math,1994(40):3-27

[5] CHERNICK J. Ideal Solutions of the Tarry-Escott Problem [J]. Amer Math Monthly, 1937(44): 626-633


# The Symmetric Ideal Parametric Solutions to the Prouhet-Tarry-Escott Problem


**QIU Min**

(College of Mathematics and Statistics, Southwestern University, Chongqing 400715, China)



**Abstract**: This paper introduces the research history of Prouhet-Tarry-Escott problem, and gives parametric form of the symmetric ideal solutions when $n=4,5,6$ in the Prouhet-Tarry-Escott Problem $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^j=\sum_{i=1}^{n}\beta_i^j$.



**Key words**: Prouhet-Tarry-Escott problem; ideal solutions; parametric solutions