doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.010

二维连续型随机变量变换的概率分布*

陶 宝, 袁德美

(重庆工商大学 数学与统计学院,重庆 400067)

摘 要:研究了二维连续型随机变量在平面上一对一变换的概率分布,更进一步地,还研究了若平面被分成若干区域, 二维连续型随机变量分区域成一对一变换时的概率分布.

关键词:二维连续型随机变量; 一对一变换; 概率分布; 分区域

中图分类号:G642 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)05-0034-03

设(X,Y)是二维连续型随机变量,联合概率密度已知, 若存在二元函数 $u=g(x,y)$,称 $U=g(X,Y)$ 为二维连续型随机变量(X,Y)的函数. 文献[1]和[2]讨论了 $U=g(X,Y)$ 的概率密度公式及计算.若还存在二元函数 $v=h(x,y)$,称$\begin{cases}U=g(X,Y)\\V=h(X,Y)\end{cases}$为二维连续型随机变量$(X,Y)$的变换. 如何求二维随机变量$(U,V)$的联合概率密度, 文献[3-5]进行了简单的讨论. 基于文献[5]此处研究了二维连续型随机变量在平面 R^2 上的一对一变换的概率分布,还研究了若平面 R^2 被分成若干区域,分区域成一对一变换时的概率分布.

定理 1 设(X,Y)的联合概率密度为$f_{X,Y}(x,y)$,变换

$$\begin{cases}u = g(x,y)\\ v = h(x,y)\end{cases}$$

存在连续偏导数,且存在唯一的逆变换

$$\begin{cases}x = x(u,v)\\ y = y(u,v)\end{cases} \tag{1}$$

设 $U=g(X,Y)$,$V=h(X,Y)$,则(U,V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\,|J|$$

其中 J 为逆变换的雅可比行列式,即

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

证明 (U,V)的联合分布函数:

$$\begin{aligned}F_{U,V}(s,t) = P(U \leqslant s,V \leqslant t) = \\ P(g(X,Y) \leqslant s,h(X,Y) \leqslant t) = \\ \iint\limits_{g(x,y)\leqslant s,h(x,y)\leqslant t} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

收稿日期:2014-09-22;**修回日期**:2014-10-09.

* **基金项目**:重庆工商大学教育教学改革研究重点项目(130114);重庆市教委教学改革项目(1203057).

作者简介:陶宝(1979-),男,四川达县人,硕士,讲师,从事极值理论研究.

作积分变换(1)得

$$F_{U,V}(s,t)=\iint\limits_{u\le s,v\le t} f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{2}$$

对式(2)两边关于 s,t 求二阶混合偏导数,得(U,V)的联合概率密度(将 s,t 分别改为 u,v)为

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(x(u,v),y(u,v))\,|J|$$

由定理 1 容易得到以下推论.

推论 1　设(X,Y)的联合概率密度为$f_{X,Y}(x,y)$,若 $U=aX+b$,$V=cY+d$,其中 a,c 为非零常数,则(U,V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v)=\frac{1}{|ac|}f_{X,Y}\left(\frac{u-b}{a},\frac{v-d}{c}\right)$$

定理 1 只考虑了整个平面 R^2 上的一对一变换,若平面 R^2 被分成若干区域, 下面讨论当分区域成一对一变换时的变量变换法.

定理 2　设(X,Y)的联合概率密度为$f_{X,Y}(x,y)$,$A_0,A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是 R^2 的一个划分,且 A_0 满足 $P((X,Y)\in A_0)=0$(A_0 可能是空集),若变换

$$\begin{cases}u=g(x,y)\\ v=h(x,y)\end{cases} \tag{3}$$

在每个区域 A_i 上有连续偏导数,且存在唯一的逆变换

$$\begin{cases}x=x_i(u,v),\\ y=y_i(u,v),\end{cases}\quad i=1,2,\cdots,n$$

设 $U=g(X,Y)$,$V=h(X,Y)$,则(U,V)的联合概率密度为

$$f_{U,V}(u,v)=\sum_{i=1}^{n}f_{X,Y}(x_i(u,v),y_i(u,v))\,|J_i|\,I_{B_i}(u,v) \tag{4}$$

其中 B_i 是 A_i 在式(3)下的像,而 J_i 为第 i 个逆变换的雅可比行列式,即

$$J_i=\frac{\partial(x_i(u,v),y_i(u,v))}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x_i(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial x_i(u,v)}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y_i(u,v)}{\partial u} & \dfrac{\partial y_i(u,v)}{\partial v}\end{vmatrix}$$

证明　(U,V)的联合分布函数

$$F_{U,V}(s,t)=P(U\le s,V\le t)=P(g(X,Y)\le s,h(X,Y)\le t)=$$

$$\iint\limits_{g(x,y)\le s,h(x,y)\le t} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\{(x,y):g(x,y)\le s,h(x,y)\le t\}\cap A_i} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{5}$$

对式(5)中的各项作积分变换(3)(限制在 A_i 上)得

$$F_{U,V}(s,t)=\sum_{i=1}^{n}\iint\limits_{\{(u,v):u\le s,v\le t\}\cap B_i} f_{X,Y}(x_i(u,v),y_i(u,v))\,|J_i|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v=$$

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{s} f_{X,Y}(x_i(u,v),y_i(u,v))\,|J_i|\,I_{B_i}(u,v)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v \tag{6}$$

式(6)两边关于 s,t 求混合二阶偏导,并将 s,t 分别改记为 u,v,就得到式(4).注意,如果每个区域 A_i 上逆变换相同,那么 $B_1,B_2,\cdots,B_n$ 两两互不相交,从而定理 2 回到定理 1.

关于相互独立的正态随机变量的和、差、积的概率分布, 大学概率统计教材讨论了很多,而相互独立的正态随机变量的商的概率分布可以利用定理 2 求得,下面只讨论标准正态变量的情形.

定理3 若随机变量X与Y独立同标准正态分布,记$U=X/Y$,则U服从柯西分布,即相互独立的标准正态变量之商是柯西随机变量.

证明 增补变量$V=|Y|$,考察变换

$$\begin{cases} u=\dfrac{x}{y} \\ v=|y| \end{cases} \tag{7}$$

由于点(x,y)和$(-x,-y)$映射至同一点(u,v),所以该变换不是一对一变换,而是多对一变换.

记$A_0=\{(x,y):y=0\}$,$A_1=\{(x,y):y>0\}$,$A_2=\{(x,y):y<0\}$,显然A_0,A_1,A_2是R^2的一个划分,并且$P((X,Y)\in A_0)=P(Y=0)=0$.

因为变换(7)在A_1上存在逆变换$\begin{cases} x=uv \\ y=v \end{cases}$,其雅可比行列式$J_1=v$;在$A_2$上存在逆变换$\begin{cases} x=-uv \\ y=-v \end{cases}$,其雅可比行列式$J_2=v$.故由定理2得$(U,V)$的联合概率密度

$$f_{U,V}(u,v)=f_{X,Y}(uv,v)|J_1|I_{B_1}(u,v)+f_{X,Y}(-uv,-v)|J_2|I_{B_2}(u,v)=$$
$$\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{(uv)^2+v^2}{2}\right\}|v|I_{B_1}(u,v)+\frac{1}{2\pi}\exp\left\{-\frac{(-uv)^2+(-v)^2}{2}\right\}|v|I_{B_2}(u,v)=$$
$$\begin{cases} \dfrac{v}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2}}, u\in\mathbf{R}, v>0 \\ 0, 其他 \end{cases}$$

最后的等号成立,是因为这里$B_1=B_2=\{(u,v:v>0)\}$.于是关于U的边缘概率密度为

$$f_U(u)=\int_0^{\infty}\frac{v}{\pi}\mathrm{e}^{-\frac{(u^2+1)v^2}{2}}\mathrm{d}v=\frac{1}{\pi(u^2+1)},\ u\in\mathbf{R}$$

即U服从柯西分布.

参考文献:

[1] 刘平兵. 二维连续型随机变量函数的密度公式及计算[J]. 数学理论与应用, 2005,25(4):94-96

[2] 袁德美,安军,陶宝. 概率论与数理统计[M]. 北京:高等教育出版社,2011

[3] 张洪川,盛克敏,马丽琼. 一维与二维连续随机变量的函数的分布[J]. 西南民族大学学报:自然科学版,2005,31(6):995-997

[4] 余本国. 一般二维连续型随机变量函数分布的讨论[J]. 华北工学院学报, 2004,25(2):94-96

[5] 茆诗松,程依明,濮晓龙. 概率论与与数理统计教程[M]. 北京:高等教育出版社,2011

Probability distribution of the mapping for the bivariate continuous random variable

TAO Bao, YUAN De-Mei

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: The probability distribution is discussed for the one-to-one mapping of the bivariate continuous random variable in plane. Moreover, if the plane is divided into several regions, the probability distribution is discussed for the one-to-one mapping of the bivariate continuous random variable in every sub-region.

Key words: bivariate continuous random variable; one-to-one mapping; probability distribution; sub-region