doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0005.007

有理数域上一类不可约多项式的简单推广

黎 智

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n-1$ 个不同的整数,证明了当 $n\geqslant 4$ 时,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约;当 $n\geqslant 3$ 时,$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

关键词:有理数域;多项式;不可约;系数;次数

中图分类号:O156 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)05-0023-03

有理系数多项式、整系数多项式是数论研究的重要类容,研究数域上的不可约多项式就好比研究整数中的素数一样重要.在代数中已经证明如果一个非零的整系数多项式能够分解成两个次数较低的有理系数多项式的乘积,那么它一定能分解成两个次数较低的整系数多项式的乘积.也就是说,在 $\mathbf{Z}$ 上不可约的整系数多项式,在 $\mathbf{Q}$ 上也不可约.因此,关于有理数域上多项式的可约性问题,可以简化为讨论整系数多项式在整数环上的可约性问题.而判别一个整系数多项式是否可约,常常是困难的.在这方面比较著名的方法有以下几类:

Ⅰ 通过多项式的系数和某素数的整除关系来判定不可约,如 Eisenstein 判别法及其推广形式[1-2].

Ⅱ 通过比较多项式系数的大小来判别不可约,如 Perron 判别法及其改进形式[3-4].

Ⅲ 通过计算 $f(x)$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的取值来判别不可约,如命题 1.

命题 1[3] 设 $f(x)$ 是 n 次整系数多项式,$S(f)=\{\cdots,|f(-1)|,|f(0)|,|f(1)|,\cdots\}$,$N_i$ 表示 $S(f)$ 中 1 的个数,N_p 表示 $S(f)$ 中素数的个数,如果 $N_p+2N_1-4>n$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

Ⅳ 通过辅助多项式根的取值来判别不可约,如命题 2.

命题 2[3] 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是彼此不相同的整数,则

1) $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约;

2) $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

定理及其证明如下:

命题 2 实则是 Schur 本世纪初提出的两个简单问题,已经得到了证明,此处在此基础上做了一个简单的推广,主要结果是:

定理 1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $n-1$ 个不同的整数,则

1) 当 $n\geqslant 4$ 时,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约;

2) 当 $n\geqslant 3$ 时,$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域 $\mathbf{Q}$ 上不可约.

证明 1) 不妨设 $a_n=a_1$,则 $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})-1$.若 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上可约,可设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,$f_i(x)$ 是整系数多项式;$1\leqslant\partial^\circ(f_i(x))<n(i=1,2)$,其中,$\partial^\circ(f(x))$ 表示 $f(x)$ 的次数,由于 $f(a_i)=-1,i=1,2,\cdots,n$,故 $f_1(a_i)=\pm 1$,$f_2(a_i)=\mp 1$,$i=1,2,\cdots,n$,即 $f_1(a_i)+f_2(a_i)=0$,$i=1,2,\cdots,n$.若 $f_1(x)+f_2(x)$ 的次数小于 $n-1$,则 $f_1(x)+f_2(x)=0$,即 $f_1(x)=-f_2(x)$,$f(x)=-f_1^2(x)$,因为 $f(x)$ 的最高项系数

收稿日期:2014-06-18;修回日期:2014-10-08.

作者简介:黎智(1990-),男,重庆奉节人,硕士研究生,从事数论研究.

是 1,此不可能.

故 $f_1(x)+f_2(x)$ 的次数只能等于 $n-1$.不妨令 $\partial°(f_1(x))=n-1$,则 $\partial°(f_2(x))=1$,此不可能.因为根据文献[5]引理 1 的证明可知,当 $n\geqslant 4$ 时,即 $n-1\geqslant 3$,对于任何整数 x',要么 $(x'-a_1)^2(x'-a_2)\cdots(x'-a_{n-1})=0$,要么 $|(x'-a_1)^2(x'-a_2)\cdots(x'-a_{n-1})|\geqslant|(x'-a_1)^2(x'-a_2)(x'-a_3)|\geqslant 2$,所以 $f(x')\neq 0$,因此 $f(x)$ 没有一次有理因式,与 $\partial°(f_2(x))=1$ 矛盾.

综上,当 $n\geqslant 4$ 时,$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ 在有理数域 **Q** 上不可约.

2) 不妨设 $a_n=a_1$,则 $f(x)=(x-a_1)^4(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1$.显然 $f(x)$ 没有实根,若 $f(x)$ 在 **Q** 上可约,类似 1) 可设 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$,$f_i(x)$ 是整系数多项式,$1\leqslant\partial°(f_i(x))<n(i=1,2)$.因为对任意实数,$f(x)>0$,不妨设对所有实数 $f_1(x)>0$,$f_2(x)>0$,由于 $f(a_i)=1$,$i=1,2,\cdots,n$,故 $f_1(a_i)=f_2(a_i)=1$,$i=1,2,\cdots,n$.若 $f_i(x)(i=1,2)$ 的次数小于 $n-1$,则 $f_i(x)\equiv 1(i=1,2)$,与所设不和,故只可能是以下两种情形:

$$\begin{cases}\partial^0(f_1(x))=n-1\\ \partial^0(f_2(x))=n+1\end{cases} \tag{1}$$

或者

$$\begin{cases}\partial^0(f_1(x))=n\\ \partial^0(f_2(x))=n\end{cases} \tag{2}$$

当 $n\geqslant 3$ 时,对于式(1),可令

$$\begin{cases}f_1(x)=1+a(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})\\ f_2(x)=1+b(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})(x^2+px+q)\end{cases}$$

其中 a,b,p,q 为整数,由 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ 可知

$$\begin{aligned}f(x)=&(x-a_1)^4(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1=\\&(x^2-2a_1x+a_1^2)(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1=\\&x^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2-2a_1x(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+\\&a_1^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f_1(x)f_2(x)=&abx^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+abpx(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+\\&abq(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+bx^2(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})+\\&bpx(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})+(bq+a)(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})+1\end{aligned}$$

比较左右两端系数得

$$\begin{cases}ab=1\\ abp=-2a_1\\ abq=a_1^2\\ bx^2+bpx+bq+a=0,x\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}ab=1\\ p=-2a_1\\ q=a_1^2\\ x^2+px+q+1=0,x\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)\end{cases}$$

化简得 $(x-a_1)^2+1=0$,此不可能.

对于式(2),类似式(1),可令

$$\begin{cases}f_1(x)=1+c(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})(x-m)\\ f_2(x)=1+d(x-a_1)\cdots(x-a_{n-1})(x-n)\end{cases}$$

其中 c,d,m,n 为整数,由 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ 可知

$$
\begin{aligned}
f(x) = &(x-a_1)^4(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1= \\
&(x^2-2a_1x+a_1^2)(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1= \\
&x^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2-2a_1x(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+ \\
&a_1^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_1(x)f_2(x)= &1+cdx^2(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2-cd(m+n)x(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+ \\
&cdmn(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_{n-1})^2+[c(x-m)+d(x-n)](x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{n-1})
\end{aligned}
$$

比较等式左右两边系数得

$$
\begin{cases}
cd=1 \\
-cd(m+n)=-2a_1 \\
cdmn=a_1^2 \\
c(x-m)+d(x-n)=0, x\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

即

$$
\begin{cases}
ab=1 \\
m+n=2a_1 \\
mn=a_1^2 \\
2x-(m+n)=0, x\neq a_i(i=1,2,\cdots,n)
\end{cases}
$$

解得 $x=a_1$,与 $x\neq a_i$ 矛盾.

综上所述,当 $n\geqslant 3$ 时,$f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ 在有理数域 **Q** 上不可约.在上述定理中,若把 $f(x)$ 换成 $f(x)=k\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)-1$,$f(x)=k\prod_{i=1}^{n}(x-a_i)^2-1$,$k>0$,结论显然也是成立的.

参考文献:

[1] 王萼芳,石生明.高等代数[M].3 版.北京:高等教育出版社,2007

[2] 赵敦,罗彦峰,雷鹏.Eisenstein 判别法的一个推广[J].高等理科教育,2005(6):38-39

[3] 柯召,孙琦.数论讲义(下)[M].北京:高等教育出版社,1987

[4] 王瑞.判定 Q 上多项式不可约的一种方法[J].数学研究与评论,2002,22(4):679-684

[5] 张卫,史滋福.有理数域上的一类不可约多项式[J].湖南理工学院学报:自然科学版,2008,21(1):5-7

Simple Generalization of a Class of Irreducible Polynomials in Rational Number Field

LI Zhi

(College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Suppose $a_1,a_2,\cdots,a_n$ are different Integers of $n-1$. This paper proves that if $n\geqslant 4$, the polynomial $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)-1$ is irreducible in the rational number range Q, and if $n\geqslant 3$, the polynomial $f(x)=(x-a_1)^2(x-a_2)^2\cdots(x-a_n)^2+1$ is irreducible in the rational number range Q.

Key words: rational number field; irreducible polynomial; coefficients; degree