doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.011

分块矩阵的几个重要应用

刘 华

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘 要:分块矩阵在线性代数中是一个重要工具,研究许多问题都要用到它,研究了分块矩阵在计算矩阵行列式、求矩阵的逆矩阵及矩阵的秩方面的应用.

关键词:分块矩阵;行列式;逆矩阵;矩阵的秩

中图分类号:O151.21 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)04-0040-06

矩阵的分块不仅是高等代数中一个非常重要的内容,而且也是研究高等代数很多分支问题的工具,它贯穿了整个高等代数的内容,已经得到广泛的研究[1-4].在学习高等代数的时候常常碰到一些很难的问题,要用到矩阵的分块去解决,它可以使问题的解决更简明,学生易于理解和掌握,而且能开拓思维,提高灵活应用知识解决问题的能力.此处主要介绍了分块矩阵的概念、初等变换,还有在高等代数中的几个应用,所介绍的几个应用将对今后学习高等代数有重要作用.

1 预备知识

定义 1[5] 把一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$,在行的方向分成 s 块,在列的方向分成 t 块,称为 $\boldsymbol{A}$ 的 $s\times t$ 分块矩阵,记作 $\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{A}_{k\times l}]_{s\times t}$,其中 $\boldsymbol{A}_{k\times l}(k=1,2,\cdots,s;l=1,2,\cdots,t)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的子块,它们是各种类型的小矩阵.

定义 2[6] 形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & O\\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ O & & & \boldsymbol{A}_n\end{bmatrix}$ 的矩阵称为块对角矩阵,即不在主对角线上的子块皆为零阵,主对角线上子块均为方阵.记为 $\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$.类似地,形如 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1n}\\ & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & \boldsymbol{A}_{nn}\end{bmatrix}$,$\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_{11} & & & \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boldsymbol{B}_{n1} & \boldsymbol{B}_{n2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{nn}\end{bmatrix}$ 的矩阵就为块上三角阵与块下三角阵.

定义 3[6] 以下 3 种变换称为分块矩阵的初等行变换:

1) 用一个行列式不为零的方阵左乘(右乘)分块矩阵的某一块行;

2) 互换两块行的位置;

3) 把一个块行的 $\boldsymbol{P}$(矩阵)倍(即这个块行里每一个小矩阵都左乘或右乘一个矩阵 $\boldsymbol{P}$)加到另一块行上.

定义 4[7] 设 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 都是 $m\times n$ 矩阵,并且对 $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ 用同样的方法进行分块:

收稿日期:2014-07-25;**修回日期**:2014-09-20.

作者简介:刘华(1987-),男,硕士研究生,四川雷波人,从事微分方程与动力系统研究.

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{lk} \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1k} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2K} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{l1} & B_{l2} & \cdots & B_{lk} \end{bmatrix}$$

其中 A_{ij},B_{ij}都是 $m_i \times n_j$ 矩阵,即 A_{ij}和 B_{ij}是同型矩阵,那么

$$A+B=\begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \cdots & A_{1k}+B_{1k} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \cdots & A_{2k}+B_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1}+B_{l1} & A_{l2}+B_{l2} & \cdots & A_{lk}+B_{lk} \end{bmatrix}$$

定义 5[7]　设 A 是 $m \times n$ 矩阵,把 A 进行分块:

$$A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{l1} & A_{l2} & \cdots & A_{lk} \end{bmatrix}$$

a 为任意数,则

$$aA=\begin{bmatrix} aA_{11} & aA_{12} & \cdots & aA_{1k} \\ aA_{21} & aA_{22} & \cdots & aA_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ aA_{l1} & aA_{l2} & \cdots & aA_{lk} \end{bmatrix}$$

定义 6[7]　设 $A=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{s1} & A_{s2} & \cdots & A_{st} \end{bmatrix}$是一个分块矩阵,那么定义它的转置矩阵为如下的矩阵:

$$A'=\begin{bmatrix} A'_{11} & A'_{21} & \cdots & A'_{s1} \\ A'_{12} & A'_{22} & \cdots & A'_{s2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A'_{1t} & A'_{2t} & \cdots & A'_{st} \end{bmatrix}$$

定理 1[7]　设 A 为 $m \times n$ 矩阵,B 为 $n \times l$ 矩阵,若对 A,B 作如下分块:

$$A=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} n_1 & n_2 & \cdots & n_s \end{array} \\ \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1s} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2s} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{r1} & A_{r2} & \cdots & A_{rs} \end{bmatrix} \end{array} \quad B=\begin{array}{c} \\ n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & \cdots & B_{1t} \\ B_{21} & B_{22} & \cdots & B_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{s1} & B_{s2} & \cdots & B_{st} \end{bmatrix} \end{array}$$

则 $AB=\begin{array}{c} \\ m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_r \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} l_1 & l_2 & \cdots & l_t \end{array} \\ \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1t} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2t} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ G_{r1} & G_{r2} & \cdots & G_{rt} \end{bmatrix} \end{array}$,其中 $G=\sum_{k=1}^{s} A_{ik}B_{ki}(i=1,2,\cdots,r;j=1,2,\cdots,t)$.

2 利用分块矩阵计算行列式

行列式是高等代数的一个重要组成部分,在高等代数中常常遇到些计算高阶行列式的问题,如果直接去计算的话,计算量不仅很大,而且很容易出错.利用矩阵的分块可以使矩阵的结构更简单,这里主要介绍几种用分块矩阵求行列式值的方法.

定理 1 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 都是 n 阶矩阵,其中 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,且 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{CA}$,则有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

证明 因为 $|\boldsymbol{A}|\neq 0$,所以 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,所以 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}\rightarrow\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$,即有

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & 0\\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix} \tag{1}$$

又因为 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{E} & 0\\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{E}\end{vmatrix}=1$,所以式(1)取行列式得 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B})|=|\boldsymbol{AD}-\boldsymbol{CB}|$.

定理 2 设 $P=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 是分块 n 阶行矩阵,其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 分别是 $r\times r,r\times(n-r),(n-r)\times r,(n-r)\times(n-r)$ 阶矩阵,那么

1)若 $\boldsymbol{A}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}|$;

2)若 $\boldsymbol{D}$ 可逆,则 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}|$,

证明 1)因为 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的,所以有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & 0\\ -\boldsymbol{CA}^{-1} & \boldsymbol{E}_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \tag{2}$$

对式(2)两边取行列式,得 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}-\boldsymbol{CA}^{-1}\boldsymbol{B}|$.

2)同理可证 $|\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{D}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BD}^{-1}\boldsymbol{C}|$ 成立.

定理 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶方阵,则有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$

证明 因为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & 0\\ -\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_n & 0\\ \boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ 0 & \boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}\end{pmatrix} \tag{3}$$

式(3)两边取行列式得 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}||\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|$ 即证.

定理 4 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 n 阶方阵,则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|\boldsymbol{C}||\boldsymbol{B}| \tag{4}$$

证明 把拉普拉斯定理用于式(4)的后 n 行,在它所有 n 阶子式中,除 $|\boldsymbol{C}|$ 外,其余至少包含一列零向量,从而值为零.而 $|\boldsymbol{C}|$ 的子余式为 $|\boldsymbol{B}|$,且 $\boldsymbol{C}$ 位于整个矩阵的第 $n+1,n+2,\cdots,n+n$ 行,第 $1,2,\cdots,n$ 列,所以有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{vmatrix}=(-1)^{s}|\boldsymbol{C}||\boldsymbol{B}|$ 其中 $s=n+1,n+2,\cdots,n+n+(1+2+\cdots+n)=n^2+2(1+2+\cdots+n)=n^2+$偶数.即有 $\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & 0\end{vmatrix}=(-1)^{n^2}|\boldsymbol{C}||\boldsymbol{B}|$.

3　利用分块矩阵求逆矩阵

定理 5　设 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 是一个四分块方阵,其中 $\boldsymbol{B}$ 为 r 阶方阵,$\boldsymbol{C}$ 为 k 阶方阵,当 $\boldsymbol{B}$ 与$(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})$ 都是可逆矩阵时,则 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵,并且有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\end{bmatrix}$$

特别地

1) 当 $\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{D}=0,\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

2) 当 $\boldsymbol{A}=0,\boldsymbol{D}\neq0,\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}-\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & \boldsymbol{O}\end{pmatrix}$;

3) 当 $\boldsymbol{A}\neq0,\boldsymbol{D}=0,\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{pmatrix}$.

证明　设 $\boldsymbol{P}$ 可逆,且 $\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}$,其中 $\boldsymbol{Y}$ 为 k 阶方阵,$\boldsymbol{Z}$ 为 r 阶的方阵,则应有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}=\boldsymbol{E}$,即$\begin{pmatrix}\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{YC} & \boldsymbol{XB}+\boldsymbol{YD}\\ \boldsymbol{ZA}+\boldsymbol{WC} & \boldsymbol{ZB}+\boldsymbol{WD}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_k & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_r\end{pmatrix}$.

于是得到等式

$$\begin{cases}\boldsymbol{XA}+\boldsymbol{YC}=\boldsymbol{E}_k(1) & (5)\\ \boldsymbol{XB}+\boldsymbol{YD}=\boldsymbol{O}(2) & (6)\\ \boldsymbol{ZA}+\boldsymbol{WC}=\boldsymbol{O}(3) & (7)\\ \boldsymbol{ZB}+\boldsymbol{WD}=\boldsymbol{E}_r(4) & (8)\end{cases}$$

因为 $\boldsymbol{B}$ 可逆,用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘式(6)可得 $\boldsymbol{X}=-\boldsymbol{Y}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}$,代入式(5)得 $\boldsymbol{X}=-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}$.用 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 右乘式(8)可得 $\boldsymbol{Z}=(\boldsymbol{E}_r-\boldsymbol{WD})\boldsymbol{B}^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{W}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}$,代入式(7)得 $\boldsymbol{W}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}$,则可得$\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}$.

所以有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y}\\ \boldsymbol{Z} & \boldsymbol{W}\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}-(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & (\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{C}-\boldsymbol{D}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A})^{-1}\end{bmatrix}$$

定理 6　设 $\boldsymbol{Q}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{pmatrix}$ 是一个四分块方阵,其中 $\boldsymbol{A}$ 为 r 阶方阵,$\boldsymbol{D}$ 为 k 阶方阵,当 $\boldsymbol{A}$ 与$(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})$ 都是可逆矩阵时,则 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵,并且有

$$\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{-1}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\\ -(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & (\boldsymbol{D}-\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B})^{-1}\end{bmatrix}$$

特别地

1) 当 $\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{C}=0,\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}^{-1}\end{pmatrix}$;

2) 当 $\boldsymbol{B}\neq0,\boldsymbol{C}=0,\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{D}^{-1}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}$;

3) 当 $\boldsymbol{B}=0,\boldsymbol{C}\neq0,\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{D}$ 都可逆时,有 $\boldsymbol{Q}^{-1}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{D}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{D}^{-1}\end{pmatrix}$.

证明与定理 5 的证明完全类似,在这里就不再赘述.

定理 7 设 $\boldsymbol{A}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n)$ 为块对角矩阵,那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆 $\Leftrightarrow \boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_n$ 可逆,且 $\boldsymbol{A}^{-1}=$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{A}_1^{-1},\boldsymbol{A}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{A}_n^{-1})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{A}_n^{-1}\end{bmatrix}.$$

推论 1 对于块反对角矩阵 $\boldsymbol{B}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_n)\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{B}_1 \\ & & \boldsymbol{B}_2 & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & \\ \boldsymbol{B}_n & & & \end{bmatrix}$,其逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1}=$

$$\mathrm{diag}(\boldsymbol{B}_1^{-1},\boldsymbol{B}_2^{-1},\cdots,\boldsymbol{B}_n^{-1})=\begin{bmatrix} & & & \boldsymbol{B}_n^{-1} \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & \boldsymbol{B}_2^{-1} & & \\ \boldsymbol{B}_1^{-1} & & & \end{bmatrix}.$$

4 利用分块矩阵处理矩阵秩的相关问题

秩作为矩阵理论的一个基本概念,在矩阵计算中有着相当重要的作用,在线性代数的学习中涉及矩阵或矩阵秩的命题的证明时因为本身的抽象性而感到困难,利用矩阵的分块方法可以使这些命题的证明简单而直观.一般采用两种方法,一是利用已知矩阵作为元素来构成矩阵来证明;二是将已知矩阵拆分成级数低的矩阵来证明.

定理 7 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n\times m$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $m\times s$ 矩阵,则有 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$,$\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{R}(B)$ 即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$.

证明 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1s}\\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2s}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{ms}\end{bmatrix}$.

令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$,$\boldsymbol{B}_1,\boldsymbol{B}_2,\cdots,\boldsymbol{B}_m$ 表示 $\boldsymbol{B}$ 的行向量,$\boldsymbol{C}_1,\boldsymbol{C}_2,\cdots,\boldsymbol{C}_n$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的行向量,则有 $\boldsymbol{C}_i=a_{i1}\boldsymbol{B}_1+a_{i2}\boldsymbol{B}_2+\cdots a_{im}\boldsymbol{B}_m(i=1,2,\cdots,n)$,即 $\boldsymbol{AB}$ 的行向量组可经 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组线性表示,所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant R(\boldsymbol{B})$.

同理,令 $\boldsymbol{A}_1,\boldsymbol{A}_2,\cdots,\boldsymbol{A}_m$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 的列向量,$\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2,\cdots,\boldsymbol{D}_s$ 表示 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量,可得 $\boldsymbol{D}_i=b_{1i}\boldsymbol{A}_1+b_{2i}\boldsymbol{A}_2+\cdots a_{mi}\boldsymbol{A}_m$ $(i=1,2,\cdots,s)$,得 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})$.

综合得到 $\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})\leqslant\min(\mathrm{R}(\boldsymbol{A}),\mathrm{R}(\boldsymbol{B}))$.

推论 2 假设 $\boldsymbol{A}$ 为 $s\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 为 $n\times m$ 矩阵,则 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})-n\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})$.

证明 作分块矩阵 $\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}$,并对其作分块矩阵的初等变换得

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{AB}\end{bmatrix}\rightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n & -\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$$

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$,又 $\mathrm{R}(\boldsymbol{C})=\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})+n$,所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})-n\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{AB})$.特别地,当 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 时,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})\leqslant n$.

定理 8 矩阵的和的秩不超过这两个矩阵的秩的和,即 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

证明　设 $\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$,对其作分块矩阵的初等变换得

$$\boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}A & O\\ B & B\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{G})=\mathrm{R}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}\geqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})$,又 $\mathrm{R}(\boldsymbol{G})=\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$,所以 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant\mathrm{R}(\boldsymbol{A})+\mathrm{R}(\boldsymbol{B})$.

定理 9　任意方阵 $\boldsymbol{A}$ 都可以写为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$,其中 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 可逆.

证明　设 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=r$,则存在 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1})=\boldsymbol{BC}$.

其中,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{P}$,$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{Q}^{-1}$,且 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ 可逆.

推论 3　$\boldsymbol{A}$ 为 $m\times n$ 矩阵,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,则存在矩阵 $\boldsymbol{B}_{n\times m}$,$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=n$,使 $\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{E}_n$.

证明　因为 $\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,所以存在可逆阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$,使得 $\boldsymbol{PAQ}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}_n\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$,所以 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{E}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}=\boldsymbol{P}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}$.取 $B=(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{O})\boldsymbol{P}$,则 $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{B})=\boldsymbol{R}(\boldsymbol{Q},\boldsymbol{O})=n$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_{n\times m}$,且 $\boldsymbol{BA}=(\boldsymbol{Q},0)\boldsymbol{PP}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\\ \boldsymbol{O}\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_n$.

推论 4　$\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\mathrm{R}(\boldsymbol{A})=n$,则存在矩阵 $\boldsymbol{B}_{m\times r}$,$\mathrm{R}(\boldsymbol{B})=r$ 与矩阵 $\boldsymbol{C}_{r\times n}$,$\mathrm{R}(\boldsymbol{C})=r$,使 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

参考文献:

[1] 严坤妹.分块矩阵的行列式的恒等式[J].福建商业高等专科学校学报,2005,6(3):78-80
[2] 乔占科.矩阵分块方法的应用[J].高等数学研究,2010,13(1):89-90
[3] 侯秋果.矩阵分块的应用[J].科技信息,2008,13(2):190-191
[4] 林瑾瑜.分块矩阵的若干性质及其在行列式计算中的应用[J].广东广播电视大学学报,2006,15(2):110-112
[5] 居余马.线性代数[M].北京:清华大学出版社,2005
[6] 北京大学数学系几何与代数教研室前代数小组.高等代数[M].3 版.北京:高等教育出版社,2003
[7] 王祖朝,褚宝增.线性代数[M].北京:北京师范大学出版社,2008

Several Important Applications of Block Matrix

LIU Hua

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331)

Abstract: Block matrix is an important tool to study many problems in linear algebra. In paper researches the application of block matrix in matrix determinant calculation, seeking inverse matrix and rank of matrix.

Key words: Block matrix; determinant; inverse matrix