doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.010

常微分方程解的存在唯一性定理证明*

聂东明，李海霞，刘家保
(安徽新华学院 公共课教学部,合肥 230088)

摘　要:微分方程解的存在唯一性证明一直以来都是教学的难点,运用不同方法,从不同角度讨论一阶微分方程解的存在唯一性,以期能有更好的方法证明解的存在唯一性.

关键词:常微分方程;初值问题;解的存在唯一

中图分类号:O175.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)04-0036-04

常微分方程是一门应用性较强的课程,它在数学、物理、天文和工程技术等领域有着广泛应用.一阶微分方程初值问题解的存在唯一性定理既是微分方程的理论基础,又是常微分方程的精华所在,在很多教材中[1-3]都是作为重点章节来讲述,而且一阶微分方程解的存在唯一性的应用也很广泛[4,5].此处从几个不同方面对解的存在唯一性定理加以明.

解的存在唯一性定理　一阶微分方程$\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)$的 Cauchy 初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=f(t,x)\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{1}$$

若函数$f(t,x)$在矩形区域$R=\{(t,x)\mid |t-t_0|\leqslant a,\ |x-x_0|\leqslant b\}$满足

(1) $f(t,x)$在 R 上连续;

(2) 函数$f(t,x)$在 R 上关于 x 满足 Lipschitz 条件,即存在常数 $L>0$,使得对所有(t,x_1),$(t,x_2)\in R$ 都有$|f(t,x_1)-f(t,x_2)|\leqslant L|x_1-x_2|$成立,则初值问题(1)在区间$|t-t_0|\leqslant h$ 上存在唯一解,其中 $h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$, $M=\max\limits_{(t,x)\in R}|f(t,x)|$.

对于该定理,函数的连续性是为了保证方程解的存在,而 Lipschitz 条件是为了保证方程解的唯一性.

1　解的存在性

证法 1　用 Picard 逼近方法证明.

仅在$[t_0,t_0+h]$证明该问题,在$[t_0-h,t_0]$上类似可得.显然该问题解的存在性与积分方程(2)的解等价

$$x=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,x(s))\,ds,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+h\tag{2}$$

构造 picard 序列$\{\varphi_n(t)\}$,即令

收稿日期:2014-08-19;**修回日期**:2014-09-25.

* **基金项目**:安徽省高等学校省级自然科学基金项目(KJ2013B105);安徽新华学院质量工程(2012jgkcx03);安徽新华学院精品课程(2012jpkc03).

作者简介:聂东明(1981-),女,河南南阳人,讲师,硕士研究生,从事偏微分方程研究.

$$\begin{cases}\varphi_0(t)=x_0,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+h\\ \varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_{n-1}(s))\mathrm{d}s,\ t_0\leqslant t\leqslant t_0+h,\ n=1,2\cdots\end{cases}\tag{3}$$

命题 1　该序列在 $[t_0,t_0+h]$ 上有定义且连续,并且 $|\varphi_n-x_0|\leqslant b$.

证明　由于 $f(t,x(t))$ 在矩形区域 R 上连续,则 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上连续.当 $n=1$ 时,

$$|\varphi_1-\varphi_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_0(s))|\mathrm{d}s\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

假设当 $n-1$ 时成立,即 φ_{n-1} 在 $[t_0,t_0+h]$ 上有定义且连续,且 $|\varphi_{n-1}-x_0|\leqslant b$,则

$$|\varphi_n-\varphi_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_{n-1}(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_{n-1}(s))|\mathrm{d}s\leqslant M|t-t_0|\leqslant Mh\leqslant b$$

由归纳法知 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上有定义连续且 $|\varphi_n-x_0|\leqslant b$.

命题 2　序列 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上一致收敛.

证明　考察函数项级数 $\varphi_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_0(t)]$,显然函数项级数的部分和为 $\varphi_n(t)$.故要证命题 2,只需证明函数项级数一致收敛即可.由于

$$|\varphi_1-\varphi_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}|f(s,\varphi_0(s))|\mathrm{d}s\leqslant M(t-t_0)$$

$$\begin{aligned}|\varphi_2-\varphi_1|&=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_0(s))\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&L\int_{t_0}^{t}|\varphi_1(s)-\varphi_0(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&LM\int_{t_0}^{t}(s-t_0)\mathrm{d}s=\frac{LM}{2!}(t-t_0)^2\end{aligned}$$

依次类推,假设 $|\varphi_n-\varphi_{n-1}|\leqslant\dfrac{L^{n-1}M}{n!}(t-t_0)^n$,则

$$\begin{aligned}|\varphi_{n+1}-\varphi_n|&=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi_n(s))-f(s,\varphi_{n-1}(s))]\mathrm{d}s\right|\leqslant\\&L\int_{t_0}^{t}|\varphi_n(s)-\varphi_{n-1}(s)|\mathrm{d}s\leqslant\\&\frac{L^nM}{n!}\int_{t_0}^{t}(s-t_0)^n\mathrm{d}s=\frac{L^nM}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}\end{aligned}$$

则由数学归纳法可知 $|\varphi_{n+1}-\varphi_n|\leqslant\dfrac{L^nM}{(n+1)!}(t-t_0)^{n+1}\leqslant\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$,由比值判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$ 收敛.故由 Weierstrass 判别法得级数 $\varphi_0(t)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}[\varphi_n(t)-\varphi_0(t)]$ 一致收敛.

命题 3　$\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$ 是积分方程的解.

证明　由于 $\{\varphi_n(t)\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上一致收敛,令 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi(t)$,由 Lipschitz 条件知道

$$|f[\varphi_n(t)]-f[\varphi(t)]|\leqslant L|\varphi_n(t)-\varphi(t)|$$

故 $\{f_n(t)\}=\{f(t,\varphi_n)\}$ 在 $[t_0,t_0+h]$ 上一致收敛到 $f(t,\varphi(t))$.对式(3)中的第 2 个式子两端求极限得

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}\lim_{n\to\infty}f(s,\varphi_{n-1}(s))\mathrm{d}s$$

即

$$\varphi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\mathrm{d}s$$

故 $\varphi(t)$ 是微分方程在 $[t_0,t_0+h]$ 上的解.

证法 2　利用压缩映像原理证明.

引理 1(压缩映像原理)　设 Ω 是闭区间 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上有定义的某一函数族 φ,满足下列性质:

1) 对于 $\varphi\in\Omega$,存在常数 $M_\varphi>0$,使得当 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 时,$\varphi(t)\leqslant M$;

2) 如果 $\varphi_n\in\Omega$, $(n=1,2,\cdots)$ 并且 $\varphi_n(t)$ 在 $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 上一致收敛于 $\varphi^*(t)$,则 $\varphi^*(t)\in\Omega$;

3) 对于 $\varphi\in\Omega$,存在 $A(\varphi)\in\Omega$ 与之对应,即 A 是把 Ω 中的函数变为 Ω 中的函数变换;

4) 存在小于 1 的正常数 θ, $0<\theta<1$, 使得当 φ_1, $\varphi_2\in\Omega$ 时, $\|A\varphi_1-A\varphi_2\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_2\|$, 这里 $\|\varphi\|\leqslant\sup\limits_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}|\varphi(t)|$,则存在唯一的 $\varphi^*(t)\in\Omega$,满足 $A\varphi^*=\varphi^*$.

解的存在唯一性定理证明如下:

证明 设 θ 为常数,令 $0<\theta<1$, $h_1=\min\{h,\dfrac{\theta}{L}\}$,设 Ω 是闭区间 $t_0-h_1\leqslant t\leqslant t_0+h_1$ 上的连续函数的全体,且 $\varphi(t)\in\Omega$, $|\varphi(t)-x_0|\leqslant b$,令 $\|\varphi\|\leqslant\sup\limits_{t_0-h_1\leqslant t\leqslant t_0+h_1}|\varphi(t)|$.由于 Ω 是 Banach 空间,显然具有引理 1 中的性质 1)和性质 2),下面证明 Ω 具有性质 3).

对于 $\varphi\in\Omega$,定义 $A(\varphi)=\psi$,即证明 $\psi\in\Omega$.因为

$$\psi(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s \tag{4}$$

由于 $\varphi(t)\in\Omega$, $|\varphi(t)-x_0|\leqslant b$,故 $f(t,\varphi(t))$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上是连续的,从而 $\psi(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上是连续的,并且

$$|\psi(t)-x_0|=\left|\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi(s))\,\mathrm{d}s\right|\leqslant M|t-t_0|\leqslant b$$

即 $\psi(t)\in\Omega$.故由式(4)定义的算子 A 具有性质 3).

下面证明 Ω 具有性质 4).设 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)\in\Omega$,令

$$\psi_1(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_1(s))\,\mathrm{d}s,\psi_2(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi_2(s))\,\mathrm{d}s$$

则

$$|\psi_1(t)-\psi_2(t)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(s,\varphi_1(s))-f(s,\varphi_2(s))]\,\mathrm{d}s\right|\leqslant L\int_{t_0}^{t}|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)|\mathrm{d}s \tag{5}$$

但 $|\varphi_1(s))-\varphi_2(s)|\leqslant\|\varphi_1(s))-\varphi_2(s)\|$,所以

$$|\psi_1(t)-\psi_2(t)|\leqslant L(t-t_0)\|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\|\leqslant Lh_1\|\varphi_1(s)-\varphi_2(s)\|$$

由此得

$$\|A\varphi_1-A\varphi_2\|=\|\psi_1-\psi_2\|\leqslant\theta\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

由压缩映像原理,存在唯一的 $\varphi^*(t)$ 在 $|t-t_0|\leqslant h_1$ 上连续,满足 $\|\varphi^*(t)-x_0\|\leqslant b$ 且 $\varphi^*(t)=x_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\varphi^*(s))\,\mathrm{d}s$.

2 解的唯一性

微分方程解的唯一性除了证法 2 中应用压缩原理之外,还可以用如下几种方法.

证法 1 利用 Gronwall 不等式.

引理 2(Gronwall 不等式) 设 K 为非负常数,$f(t)$ 和 $g(t)$ 都是区间$[a,b]$上的连续非负函数,且满足不等式

$$f(t)\leqslant K+\int_a^t f(s)g(s)\,\mathrm{d}s,\ \forall t\in[a,b]$$

则有

$$f(t)\leqslant K\exp\left(\int_a^t g(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

微分方程(1)解的唯一性证明如下:

证明 设 $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ 都是微分方程(1)的解,则

$$|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|=\left|\int_{t_0}^{t}[f(\varphi_1-f(\varphi_2)\,\mathrm{d}t]\right|\leqslant\int_{t_0}^{t}L|\varphi_1(x)-\varphi_2(x)|\mathrm{d}x \tag{6}$$

由 Gronwall 不等式,令 $K=0, g(s)=L, f(s)=|\varphi_1-\varphi_2|$,则

$$|\varphi_1-\varphi_2|\leqslant 0,\ \exp\left(\int_a^t L\mathrm{d}s\right)=0$$

故 $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$

证法 2 设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 都是微分方程(1)在$[t_0,t_0+h]$上的解,令 $g(t)=|\varphi_1(t)-\varphi_2(t)|$,则式(6)可写为

$$g(t)\leqslant\int_{t_0}^t Lg(s)\mathrm{d}s \tag{7}$$

令 $u(t)=\int_{t_0}^t Lg(s)\mathrm{d}s$,则 $u(t)$ 是定义在$[t_0,t_0+h]$上的连续可微函数,且 $u(t_0)=0, 0\leqslant g(t)\leqslant u(t), u'(t)=Lg(t)$,于是

$$u'(t)=Lu(t),(u'(t)-Lu(t))\mathrm{e}^{-Lx}\leqslant 0 \tag{8}$$

对式(8)中第 2 个式子不等式从 t_0 到 t 上积分,$\int_{t_0}^t(u'(s)-Lu(s))\mathrm{e}^{-Ls}\mathrm{d}s\leqslant 0$,得 $u(t)\mathrm{e}^{-Lt}-u(t_0)\mathrm{e}^{-Lt_0}\leqslant 0$,即 $u(t)\mathrm{e}^{-Lt}\leqslant u(t_0)\mathrm{e}^{-Lt_0}=0$,而 $g(t)\leqslant\int_{t_0}^t Lg(s)\mathrm{d}s=u(t)\leqslant 0$,即 $g(t)=0$,故解唯一.

证法 3 反证法.

设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t)$ 都是微分方程在$[t_0,t_0+h]$上的解,记 $e(t)=[\varphi_1-\varphi_2]^2, h_1=\min\{h,\frac{1}{3L}\}, K=\max e(t)=e(t_1)$,其中 t_1 为$[t_0,t_0+h_1]$上某一点,显然 $e(t)$ 在$[t_0,t_0+h_1]$上连续,$e(t_0)=0$,且

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=2(\varphi_1-\varphi_2)(\frac{\mathrm{d}\varphi_1}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}\varphi_2}{\mathrm{d}t})=2(\varphi_1-\varphi_2)(f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2))$$

则由 lipschitz 条件有

$$\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}=\left|\frac{\mathrm{d}e(t)}{\mathrm{d}t}\right|=2|(\varphi_1-\varphi_2)(f(t,\varphi_1)-f(t,\varphi_2))|\leqslant 2L|(\varphi_1-\varphi_2)|^2=2Le(t) \tag{9}$$

由中值定理及式(9)得

$$K=e(t_1)=e(t_1)-e(t_0)=e'(\xi)(t_1-t_0)\leqslant 2Le(t_2)(t_1-t_0)\leqslant\frac{2L}{3L}e(t_2)\leqslant\frac{2}{3}K(\xi\in[t_0,t_1])$$

与式(9)矛盾,于是解是唯一的.

参考文献:

[1] 王高雄,周之铭.常微分方程[M].3 版.北京:高等教育出版社,2006

[2] 丁同任,李承治.常微分方程教程[M].北京:高等教育出版社,2004

[3] 郭大均,孙经先.抽象空间常微分方程[M].济南: 山东科学技术出版社,1989

[4] 李微微,范胜君.一类常微分方程解的存在唯一性及其应用[J].数学实践与认识,2014,44(3):203-209

[5] 王海玲,张志军.一类一阶常微分方程初值问题的无穷多解性[J].高等数学研究,2010,13(4):27-28

Proof of Sole Existence and Uniqueness Theorem of Solution to Ordinary Differential Equations

NIE Dong-ming, LI Hai-xia , LIU Jia-bao

(Department of Public Courses, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: The proof of existence and uniqueness of solutions to differential equations has been the difficulty of teaching. This paper uses different methods to prove the existence and uniqueness of solutions to first-order differential equations to find a better way to prove the existence and uniqueness of solution.

Key words: ordinary differential equations; initial value problem; existence and uniqueness of solution