doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.009

带有 q 距离的向量 Ekeland 变分原理

付科程
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:基于变分原理的形式和空间的多样性,研究了带有 q 距离的向量 Ekeland 变分原理在分离序列完备一致空间中的一些重要应用.

关键词:向量 Ekeland 变分原理;q 距离;分离序列完备一致空间

中图分类号:0176　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)04-0032-04

众所周知,Ekeland 变分原理在数学非线性分析理论中有着非常重要的地位,它在非线性分析、全局控制优化理论、向量均衡问题、临界点理论与博弈论等诸多领域中有着十分重要的意义和作用.许多学者对 Ekeland 变分原理从空间和表达形式上进行了推广,得出了各种类型的 Ekeland 变分原理.基于此,研究了在分离序列完备一致空间中,带有 q 距离的向量 Ekeland 变分原理及其一些应用问题.

1　预备知识

定义 1[5]　设 X 是一个分离一致空间,有一个实值映射 $P:X\times X\to[0,+\infty)$ 满足以下条件:

1) $p(x,z)\leqslant p(x,y)+p(y,z)$, $\forall x,y,z\in X$;

2) 对任意序列 $\{y_n\}\subset X$,若满足 $p(y_n,y_m)\to 0(m>n\to\infty)$,则称 $\{y_n\}$ 为柯西列,$p(y_n,y)\to 0$ 等价于$y_n\to y$;

3) $p(z,x)=0$ 且 $p(z,y)=0$,则 $x=y$,对每个 $x,y,z\in X$,称 p 为 p 距离.如果条件 2)变为更弱的条件 2^*):对任意序列 $\{y_n\}\subset X$,若满足 $p(y_n,y_m)\to 0(m>n\to\infty)$ 是柯西列,且在 X 内,$p(y_n,y)\to 0$ 包含着 $y_n\to y$,则称 p 为 q 距离.

引理 1[2]　Y 是拓扑向量空间,$K\subset Y$ 是一个闭凸锥,$k_o\in K\backslash -K$,定义非线性标量化函数 $\xi_{k_o}:Y\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$

$$\xi_{k_o}(y):=\inf\{t\in\mathbf{R},y\in tk_o-K\}$$

则函数 $\xi_{k_o}(y)$ 有以下几种性质:

(i) $\xi_{k_o}(y)$ 为真;

(ii) $\xi_{k_o}(y)$ 下半连续;

(iii) $\xi_{k_o}(y)$ 次线性;

(iv) $\xi_{k_o}(y)$ 为 K-单调(即 $y_1\leqslant_k y_2,\xi_{k_o}(y_1)\leqslant\xi_{k_o}(y_2)$);

(v) $\{y\in Y|\xi_{k_o}(y)\leqslant t\}=tk_o-K$;

(vi) $\xi_{k_o}(y+\lambda k_o)=\xi_{k_o}(y)+\lambda$, $\forall y\in Y,\lambda\in\mathbf{R}$.

定义 2　Y 是拓扑向量空间,$K\subset Y$ 是一个闭凸锥,则关于 K 的预序"$\leqslant_K$"有如下定义:$\forall y_1,y_2\in Y$,有

收稿日期:2014-08-06;**修回日期**:2014-09-25.

作者简介:付科程(1989-),男,重庆潼南人,硕士研究生,从事向量优化理论及应用研究.

$y_1 \leqslant_K y_2$ 当且仅当 $y_2 - y_1 \in K$.

定义 3　函数 $f:X \to Y \cup \{\infty\}$ 被称为关于序列 p 下单调的,如果序列 $\{x_n\} \subset X$ 满足 $x_n \to \bar{x}$ 且 $f(x_{n+1}) \leqslant_K f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$,则有 $f(\bar{x}) \leqslant_K f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$.

定义 4　设 (X,U) 是一致空间,p 是 q 距离,$f:X \to Y \cup \{\infty\}$ 关于 $\leqslant_K$ 的下单调特征函数(如果 $\mathrm{dom}\, f = \{x \in X, f(x) \in Y\} \neq \varnothing$) (X,U) 关于 (p,f) 序完备,如果在 X 中有一个序列 $\{x_n\}$ 满足 $p(x_n,x_m) \to 0\ (m>n\to\infty)$, $f(x_{n+1}) \leqslant_K f(x_n)$, $\forall n \in \mathbf{N}$,则 $\exists \bar{x} \in x$,使得 $x_n \to \bar{x}$(即 $p(x_n,\bar{x}) \to 0$).

2　主要结果

定理 1(向量 Ekelangd 变分原理)　设 (X,U) 是分离序列完备一致空间,$P: X\times X \to [0,+\infty)$ 是 q 距离,Y 是含有零向量的拓扑向量空间,$K \subset Y$ 是一个闭凸锥,$k_o \in K \setminus -K$. $\varphi: Y \to (0,+\infty)$ 为非减函数(即 $y_1 \leqslant_k y_2$, $\varphi(y_1) \leqslant \varphi(y_2)$),$f: X \to Y \cup \{\infty\}$ 为序列下单调函数,$\forall x \in X$. 设 $F(x) = \{x' \in X: f(x') + \dfrac{k_o p(x,x')}{\varphi \circ f(x)} \leqslant_K f(x)\}$, $x_o \in X, y_o \in Y, \varepsilon>0$,使得 $f(x_o) \in y_o + (-\infty,+\infty)k_o - K$ 且 $f(X) \cap (y_o - \varepsilon k_o - K) = \varnothing$,则 $f(x) + \dfrac{k_o p(x_o,x)}{\varphi \circ f(x_o)} \nleqslant_K f(x_o)$, $\forall x \in X \setminus \{x_o\}$,或者 $\exists \bar{x} \in X$,使得

(i) $f(\bar{x}) + \dfrac{k_o p(x_o,\bar{x})}{\varphi \circ f(x_o)} \leqslant_K f(x_o)$;

(ii) $f(x) + \dfrac{k_o p(\bar{x},x)}{\varphi \circ f(\bar{x})} \nleqslant_K f(\bar{x})$, $\forall x \in X \setminus \{\bar{x}\}$.

证明　$\forall x \in X$,有 $F(x) = \{x' \in X: f(x') + \dfrac{k_o p(x,x')}{\varphi \circ f(x)} \leqslant_K f(x)\}$, $\forall u \in \mathrm{dom}\, f, \nu \in F(u)$,有 $f(\nu) \leqslant_K f(u)$.事实上,设 $\forall x \in F(v)$,有

$$\begin{aligned} f(x) + \frac{k_o p(u,x)}{\varphi \circ f(u)} &\leqslant_K f(x) + \frac{k_o(p(u,v) + p(v,x))}{\varphi \circ f(u)} \leqslant \\ &{}_K f(x) + \frac{k_o p(u,v)}{\varphi \circ f(u)} + \frac{k_o p(v,x)}{\varphi \circ f(u)} \leqslant \\ &{}_K f(x) + \frac{k_o p(v,x)}{\varphi \circ f(v)} + \frac{k_o p(u,v)}{\varphi \circ f(u)} \leqslant \\ &{}_K f(v) + \frac{k_o p(u,v)}{\varphi \circ f(u)} \leqslant_K f(u) \end{aligned}$$

所以 $x \in F(u)$, $F(v) \subset F(u)$.

现在证明结论(反证法):

假设 $f(x) + \dfrac{k_o p(x_o,x)}{\varphi \circ f(x_o)} \nleqslant_K f(x_o)$, $\forall x \in X \setminus \{x_o\}$ 不成立,则

$$f(x_1) + \frac{k_o p(x_o,x_1)}{\varphi \circ f(x_o)} \leqslant_K f(x_o),\ \exists x_1 \in X \setminus \{x_o\}$$

所以 $F(x_o) = \{x_1 \in X: f(x_1) + \dfrac{k_o p(x_o,x_1)}{\varphi \circ f(x_o)} \leqslant_K f(x_o)\}$,有 $F(x_o) \supset F(x_o) \setminus \{x_o\} \neq \varnothing$.

对$\forall x\in X$,定义了 $g(x)=\xi_{k_o}(f(x)-y_o)$,因为$f(X)\cap(y_o-\varepsilon k_o-K)=\varnothing$,所以$(f(x)-y_o)\cap(-\varepsilon k_o-K)=\varnothing$,则$f(x)-y_o\notin-\varepsilon k_o-K$, $\forall x\in X$.

又 $g(x)=\xi_{k_o}(f(x)-y_o)\geqslant-\varepsilon$,$g$ 有界,有

$$f(x)-y_o+\frac{k_o p(x_o,x)}{\varphi\circ f(x_o)}\leqslant_K f(x_o)-y_o,\ \forall x\in f(x_o)$$

由引理 1 中的(vi)可知:

$$g(x)+\frac{p(x_o,x)}{\varphi\circ f(x_o)}=\xi_{k_o}(f(x)-y_0+\frac{p(x_o,x)}{\varphi\circ f(x_o)})=$$

$$\xi_{k_o}(f(x)-y_0)+\frac{p(x_o,x)}{\varphi\circ f(x_o)})\leqslant$$

$$\xi_{k_o}(f(x)-y_0)=g(x_o)$$

故 g 有界,取 $x_1\in F(x_o)$,有 $g(x_1)<\inf_{F(x_o)}g+\frac{1}{2}$.若 x_1 满足$f(x)+\frac{k_o p(x_1,x)}{\varphi\circ f(x_1)}\nleqslant_K f(x_n)$, $\forall x\in X\setminus\{x_1\}$,则$\bar{x}=x_1$,结论成立.

若不成立,则有 $F(x_1)\supset F(x_1)\setminus\{x_1\}\neq\varnothing$,取 $x_2\in F(x_1)$,$g(x_2)<\inf_{F(x_1)}g+\frac{1}{2^2}$,重复上述过程,对某个 n,有$f(x)+\frac{k_o p(x_n,x)}{\varphi\circ f(x_n)}\nleqslant_K f(x_n)$, $\forall x\in X\setminus\{x_n\}$,则$\bar{x}=x_n$.

所以$\bar{x}\in F(x_{n-1})\subset F(x_{n-2})\subset\cdots\subset F(x_o)$, $\exists\bar{x}=x_n$ 满足(i)和(ii);否则,得到一个序列 $x_{n+1}\in F(x_n)$和 $g(x_{n+1})<\inf_{F(x_n)}g+\frac{1}{2^{n+1}}(n=0,1,2,\cdots)$.由上述证明方法可知

$$g(x_{n+1})\leqslant_K g(x_n),F(x_{n+1})\subset F(x_n)$$

所以$\{g(x_n)\}$为一个不增下有界序列;$\exists r\in\mathbf{R}$,有$\lim\limits_{n\to\infty}g(x_n)=r$,$g(x_m)>r(\forall m\in\mathbf{N})$,当 $m>n$ 时,有 $x_m\in F(x_{m-1})\subset F(x_n)$,即

$$f(x_m)+\frac{k_o p(x_n,x_m)}{\varphi\circ f(x_n)}\leqslant_K f(x_n)$$

所以

$$\xi_{k_o}(f(x_m)-y_0+\frac{k_o p(x_n,x_m)}{\varphi\circ f(x_n)})\leqslant_K\xi_{k_o}(f(x_n)-y_0)$$

又因为 $g(x_n)=\xi_{k_o}(f(x_n)-y_0)$,有

$$g(x_m)+\frac{p(x_n,x_m)}{\varphi\circ f(x_n)}\leqslant g(x_n)$$

$$p(x_n,x_m)\leqslant(g(x_n)-g(x_m))\cdot\varphi\circ f(x_n)\leqslant\varphi\circ f(x_o)(g(x_n)-r)\to 0(m>n\to\infty)$$

又(X,U)关于(p,f)为序完备,则$\exists\bar{x}\in X$,有 $x_n\to\bar{x}$,$\bar{x}\in F(x_n)$.特别地,取$\bar{x}\in F(x_o)$,$F(\bar{x})\subset F(x_n)$,即$f(\bar{x})+\frac{k_o p(x_o,\bar{x})}{\varphi\circ f(x_o)}\leqslant_K f(x_o)$.这里,可以说明满足$f(x)+\frac{k_o p(\bar{x},x)}{\varphi\circ f(\bar{x})}\nleqslant_K f(\bar{x})$, $\forall x\in X\setminus\{\bar{x}\}$.若不是,则$\exists x'\in X$,$x'\neq\bar{x}$,有

$$f(x')+\frac{k_o p(\bar{x},x')}{\varphi\circ f(\bar{x})}\leqslant_K f(\bar{x})$$

则

$$x'\in F(\bar{x}),x'\in F(x_n),\forall n\in\mathbf{N}$$

$$f(x') + \frac{k_o p(x_n, x')}{\varphi \circ f(x_n)} \leqslant_K f(x_n)$$

$$g(x') + \frac{k_o p(x_n, x')}{\varphi \circ f(x_n)} \leqslant_K g(x_n)$$

$$\begin{aligned} p(x_n, x') &\leqslant (g(x_n) - g(x')) \cdot \varphi \circ f(x_n) \leqslant \\ &\varphi \circ f(x_o)(g(x_n) - \inf_{F(x_{n-1})} g) \leqslant \\ &\varphi \circ f(x_o) \cdot \frac{1}{2^n} \to 0 (n \to \infty) \end{aligned}$$

$x_n \to x'$,故 $x' = \bar{x}$.这与假设 $x' \neq \bar{x}$ 矛盾,所以结论成立.

参考文献:

[1] ADAN M,NOVO V.Proper Efficiency in Vector Optimization on Real Linear Spaces[J].J Optim Theory Appl,2004(121): 515-540

[2] DE D G.Figueiredo the Ekeland Variational Principle with Applications and Detours[M].Tata Institute of Fundamental Research, Bombay,1989

[3] BEDNARCZUK E M,PRZYBYLA M J.The Vector-valued Variational Principle in Banach Spaces Ordered by Cones with Nonempty Interiors[J].SIAM J Optim,2007(18):907-913

[4] CHEN G Y,YANG X Q ,YU H.Vector Ekeland's Variational Principle in an F-type Topological Space[J].Math Meth Oper Res, 2008(67):471-478

[5] QIU J H,FEI H.P-Distances,Q-Distances and a Generalized Ekeland's Variational Principle in Uniform Spaces[J].Acta Mathematics sinica English Senies,2012(2): 235-254

[6] GOPFERT A,TAMMER CHR,ZALINESCU C.On the Vectorial Ekeland's Variational Principle and Minimal Points in Product Spaces[J].Nonlinear Anal,2000(39):909-922

[7] LIN L J,DU W S.On Maximal Element Theorems,Variants of Ekeland's Variational Principle and Their Applications[J]. Nonlinear Anal,2008(68):1246-1262

[8] QIU J H.Ekeland's Variational Principle in Locally Complete Spaces[J].Math Nachr,2003(257):55-58

[9] LIN L J,DU W S.Some Equivalent Formulations of the Generalized Ekeland's Variational Principle and Their Applications[J]. Nonlinear Analysis,2007(67) : 187-199

[10] BIANCHI M,KASSAY G,PINI R.Existence of Equilibria via Ekeland's Principle[J].Journal of Mathematical Analysis and Applications,2005(305):502-512

Vector Ekeland's Variation Principle With q Distance

FU Ke-cheng

(School of Mathematics,Chongqing Normal University,Chongqing 401331,China)

Abstract: Based on the diversity of variation principle in form and space, this paper researches some important application of vector Ekeland's variation principle with q distance in complete uniform space of separation sequence.

Key words: Vector Ekeland variation principle; q distance; complete uniform space of separation sequence