doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.008

矩阵方程 $AX=B$ 的 W 准反对称最小秩解*

杜玉霞, 梁 武, 费时龙

(宿州学院数学与统计学院,安徽 宿州 234000)

摘 要: 给定 $X,B\in R^{n\times m}$ 和正整数 s,在集合 $W^{-1}ASR^{n\times n}$ 中寻找矩阵方程 $AX=B$ 的解 A,使得 $\mathrm{r}(A)=s$;当解集 $S_1=\{A\in W^{-1}ASR^{n\times n}\mid AX=B\}$ 非空时,记 $\tilde{m}=\min\limits_{A\in S_1}\mathrm{r}(A)$,$\tilde{M}=\max\limits_{A\in S_1}\mathrm{r}(A)$,在 S_1 中确定最大、最小秩解.

关键词: W 准反对称矩阵;矩阵方程;最大秩;最小秩

中图分类号: O151 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-058X(2015)04-0028-04

设 $R^{n\times m}$ 表示所有 $n\times m$ 实矩阵的集合;$ASR^{n\times n}$ 和 $OR^{n\times n}$ 分别表示所有 $n\times n$ 反对称和正交矩阵的集合;记号 A^{T},A^{+},A^{-} 和 $\mathrm{r}(A)$ 分别代表矩阵 A 的转置、Moore-Penrose 广义逆、内逆、和秩;记号 L_A 和 R_A 表示由 A 决定的两个投影 $L_A=I-AA^{-}$ 和 $R_A=I-A^{-}A$;矩阵 I 和 0 分别表示单位阵和零矩阵.

近年来,由于矩阵秩方法的应用,不少作者对线性矩阵方程的最大、最小秩问题做了研究.例如,王[1-5]得到了一些有关四元素矩阵方程系统的重要结论;田[6]得到了矩阵方程 $A=BX+YC$ 的最小秩解;肖[7]研究了矩阵方程 $AX=B$ 的对称最小秩解.此处研究矩阵方程 $AX=B$ 的 W 准反对称解,从解集中找出它的最大、最小秩解,并得到指定秩的 W 准反对称解.当 $W=D^2$ 时,所研究的问题就变为 D 反对称矩阵的最小秩问题[8],并且当 $W=I_n$ 时,所研究的问题就变为反对称矩阵的最小秩问题,即矩阵方程 $AX=B$ 的反对称最小秩解、D 反对称最小秩解都是文中特例.

1 引 理

引理 1[9] 设矩阵 A,B,C,D 分别为 $m\times n,m\times k,l\times n,l\times k$ 矩阵,那么

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}=\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}(C(I-A^{-}A)) \tag{1}$$

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}+\mathrm{r}(A\quad B)-\mathrm{r}(A)+\mathrm{r}[L_G(D-CA^{-}B)R_H] \tag{2}$$

其中 $G=CR_A$,$H=L_AB$.

引理 2[10] 给定矩阵 $X,B\in R^{n\times m}$,设 WX 的奇异值分解为

$$WX=U\begin{pmatrix}\sum&0\\0&0\end{pmatrix}V^{\mathrm{T}}=U_1\sum V_1^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

收稿日期: 2014-07-11;**修回日期:** 2014-09-20.

* **基金项目:** 安徽省高等学校省级自然科学研究项目(KJ2013B288);宿州学院教学研究项目(szxyjyxm201237).

作者简介: 杜玉霞(1981-),女,山东定陶人,助教,硕士研究生,从事矩阵方程反问题的研究.

其中 $U=(U_1\quad U_2)\in OR^{n\times n}, U_1\in R^{n\times k}, V=(V_1\quad V_2)\in OR^{m\times m}, V_1\in R^{m\times k}, k=\mathrm{r}(WX)=\mathrm{r}(X)$，$\sum=\mathrm{diag}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_k),\sigma_1\geqslant\cdots\geqslant\sigma_k>0$，那么矩阵方程 $AX=B$ 在集合 $W^{-1}ASR^{n\times n}$ 中可解的充要条件为

$$B=B(WX)^{+}(WX),\quad X^{\mathrm{T}}WB=-B^{\mathrm{T}}WX \tag{4}$$

并且在有解时，通解为

$$A=U\begin{pmatrix}U_1^{\mathrm{T}}BV_1\sum^{-1} & -\sum^{-1}V_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}U_2\\ U_2^{\mathrm{T}}BV_1\sum^{-1} & A_{22}\end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}W,\quad \forall A_{22}\in ASR^{(n-k)\times(n-k)}$$

2　结论及证明

定理 1　给定矩阵 $X,B\in R^{n\times m}$ 和一个正整数 s，设 WX 的奇异值分解为式(3)，那么矩阵方程 $AX=B$ 具有秩为 s 的 W 准反对称解的充要条件为

$$B=BX^{+}X,\quad X^{\mathrm{T}}WB=-B^{\mathrm{T}}WX,\quad 2\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(X^{\mathrm{T}}WB)\leqslant s\leqslant n+\mathrm{r}(B)-\mathrm{r}(X)$$

且一般解为

$$A=BX^{+}-[B(WX)^{+}]^{\mathrm{T}}W(I-XX^{+})+U_2A_{22}U_2^{\mathrm{T}}W$$

其中，$U_2\in R^{n\times(n-k)}, U_2^{\mathrm{T}}U_2=I_{n-k}, A_{22}=A_{21}A_{11}^{+}A_{12}+N, N\in ASR^{(n-k)\times(n-k)}$ 满足

$$\mathrm{r}(L_{G_1}NL_{G_1})=s+\mathrm{r}(X^{\mathrm{T}}WB)-2\mathrm{r}(B)$$

证明　假设式(4)成立，由引理 2，矩阵方程 $AX=B$ 的 W 准反对称解的一般形式为

$$A=U\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}U^{\mathrm{T}}W$$

其中 $A_{11}=U_1^{\mathrm{T}}BV_1\sum^{-1}\in ASR^{k\times k}, A_{12}=-\sum^{-1}V_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}U_2\in R^{k\times(n-k)}$，满足

$$A_{11}=-A_{11}^{\mathrm{T}},\quad A_{12}=-A_{21}^{\mathrm{T}},\quad A_{22}=-A_{22}^{\mathrm{T}}$$

因此，

$$\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix} \tag{5}$$

令 $\mathrm{r}\begin{pmatrix}A_{11}\\ A_{21}\end{pmatrix}+\mathrm{r}(A_{11}\quad A_{12})-\mathrm{r}(A_{11})=t$，对式(5)中的 A 应用式(2)得

$$\mathrm{r}(A)=t+\mathrm{r}[L_{G_1}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{+}A_{12})R_{H_1}]$$

其中 $G_1=A_{21}(I-A_{11}^{-}A_{11}), H_1=(I-A_{11}A_{11}^{-})A_{12}$.

因为 $A_{11}=-A_{11}^{\mathrm{T}}, A_{12}=-A_{21}^{\mathrm{T}}$，所以 $G_1=-H_1^{\mathrm{T}}$. 又 $L_{G_1}=I-G_1G_1^{+}, R_{H_1}=I-H_1^{+}H_1$，因此 $L_{G_1^{\mathrm{T}}}=R_{H_1}=L_{G_1}$. 和 A_{22} 相关的矩阵 A 的秩由关系式 $L_{G_1}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{+}A_{12})L_{G_1}$ 决定，容易得到

$$\min_{A}\mathrm{r}(A)=\min_{A_{22}}\mathrm{r}[L_{G_1}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{+}A_{12})L_{G_1}]+t \tag{6}$$

$$\max_{A}\mathrm{r}(A)=\max_{A_{22}}\mathrm{r}[L_{G_1}(A_{22}-A_{21}A_{11}^{+}A_{12})L_{G_1}]+t \tag{7}$$

因为 $B=B(WX)^{+}WX=BX^{+}W^{-1}WX=BX^{+}X, WX=U_1\sum V_1^{\mathrm{T}}, U_1^{\mathrm{T}}U_1=I_k, V_2^{\mathrm{T}}V_2=I_k, V_1V_1^{\mathrm{T}}+V_2V_2^{\mathrm{T}}=I_m, BV_2=0$，又

$$\mathrm{r}\begin{pmatrix}A_{11}\\ A_{21}\end{pmatrix}=\mathrm{r}(U^{\mathrm{T}}BV_1\sum^{-1})=\mathrm{r}(BV_1)=\mathrm{r}[B(V_1\quad V_2)]=\mathrm{r}(BV)=\mathrm{r}(B) \tag{8}$$

$$\mathrm{r}(A_{11}\quad A_{12})=\mathrm{r}(-A_{11}^{\mathrm{T}}\quad A_{12})=\mathrm{r}(-\sum^{-1}V_1^{\mathrm{T}}B^{\mathrm{T}}U)=\mathrm{r}(BV_1)=\mathrm{r}(B) \tag{9}$$

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{11})=\mathrm{r}(\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1\sum{}^{-1})=\mathrm{r}(\sum\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1)=\mathrm{r}(\boldsymbol{V}_1\sum\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})=\mathrm{r}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}) \tag{10}$$

由式(5)(6)和引理 1,当 $\mathrm{r}[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}]=0$ 时,$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 是最小的,由式(8)-(10),得到矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{W}$ 准反对称解的最小秩为

$$\tilde{m}=2\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B}) \tag{11}$$

记

$$\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{N} \tag{12}$$

其中 $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{ASR}^{(n-k)\times(n-k)}$ 满足 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}=0$. 由引理 2,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{W}$ 准反对称最小秩解可表示为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}&=(\boldsymbol{U}_1\quad\boldsymbol{U}_2)\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1\sum{}^{-1} & -\sum{}^{-1}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1\sum{}^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{W}=\\ &\left(\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1\sum{}^{-1}-\boldsymbol{U}_1\sum{}^{-1}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}_{22}\right)\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{W}=\\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{V}_1\sum{}^{-1}\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}-\boldsymbol{U}_1\sum{}^{-1}\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}=\\ &\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{+}\boldsymbol{W}-[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{+}]^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{U}_1^{\mathrm{T}})\boldsymbol{W}+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}=\\ &\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{+}-[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{+}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\end{aligned} \tag{13}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{22}$ 如式(12).

因为 $\mathrm{r}[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}]$ 最大相当于 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$ 最大,于是

$$\max_{A_{22}}\mathrm{r}[\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}(\boldsymbol{A}_{22}-\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{12})\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}]=\mathrm{r}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1})$$

由于 $\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}$ 是一个幂等矩阵,可得

$$\begin{aligned}\mathrm{r}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1})&=\mathrm{trace}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1})=n-k-\mathrm{r}(\boldsymbol{G}_1\boldsymbol{G}_1^{+})=n-k-\mathrm{r}(\boldsymbol{G}_1)=n-k-\mathrm{r}[\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{11})]=\\ &n-k-r\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}\\ \boldsymbol{A}_{21}\end{pmatrix}+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}_{11})=n-k-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B})=n-\mathrm{r}(\boldsymbol{X})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B})+\mathrm{r}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B})\end{aligned}$$

由式(5),(7)-(10)和引理 1,得到矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{W}$ 准反对称解的最大秩为

$$\tilde{M}=n+\mathrm{r}(\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{X}) \tag{14}$$

与最小秩解的讨论类似,矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的 $\boldsymbol{W}$ 准反对称最大秩解为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{X}^{+}-[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{W}\boldsymbol{X})^{+}]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{X}^{+})+\boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{U}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W} \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{A}_{22}=\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{+}\boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{N}$,任意矩阵 $\boldsymbol{N}\in\boldsymbol{ASR}^{(n-k)\times(n-k)}$ 满足

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1}\boldsymbol{N}\boldsymbol{L}_{\boldsymbol{G}_1})=n+\mathrm{r}(\boldsymbol{X}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{W}\boldsymbol{B})-\mathrm{r}(\boldsymbol{X})-\mathrm{r}(\boldsymbol{B}) \tag{16}$$

综合式式(4),(11)-(16),得到了定理 1 的结论.

参考文献:

[1] WANG Q W.Extreme Ranks of a Quaternion Matrix Expression Subject to Consistent Systems of Quaternion Matrix Equations with Applications[J].Appl Math Comput,2006(182):1755-1764

[2] WANG Q W.Extreme Ranks of the Solution to a Consistent System of Linear Quaternion Matrix Equations with an Application[J].Appl Math Comput,2007(189):1517-1532

[3] WANG Q W. Extreme Ranks of a Linear Quaternion Matrix Expression Subject to Triple Quaternion Matrix Equations with Applications[J].Appl Math Comput,2008(195):733-744

[4] WANG Q W.Ranks and the Least-norm of the General Solution to a System of Quaternion Matrix Equations with an Applications[J].Linear Algebra Appl,2009(430):1626-1640

[5] WANG Q W.The Real Solutions to a System of Quaternion Matrix Equations with Appications[J].Communication in Algebra,2009(37):2060-2079

[6] TIAN Y.The Minimal Rank of the Matrix Expression A-BX-YC[J].Missouri J Math Sci,2002(14):40-48

[7] XIAO Q.The Symmetric Minimal Rank Solution of the Matrix Equation AX = B and the Optimal Approximation[J].Electronic Journal of Linear Algebra,2009(18):264-273

[8] ZHANG Z.Least-square Solutions to Inverse Problems for D-anti-symmetric Matrices[J].Journal of Central South University of Technology:Nat Sci Ed,2001(32):545-548

[9] TIAN Y.The Maximal and Minimal Ranks of Some Expressions of Generalized Inverse of Matrices[J].Southeast Asian Bull Math,2002(25):745-755

[10] TANG Y.Least-squares Solution of Inverse Problems for W-para-anti-symmetric Matrices[J].J Wuhan Univ:Nat Sci Ed,2009(55):651-655

The W-para-anti-symmetric Minimal Rank Solution of the Matrix Equation AX=B

DU Yu-xia, LIANG Wu, FEI Shi-long

(College of mathematics & statistics, Suzhou Universtiy, Suzhou, 234000 China)

Abstract: Given $X, B \in R^{n\times m}$, and a positive integer s, search $A \in W^{-1}ASR^{n\times n}$ for A of $AX=B$, to make $r(A)=s$. When the solution set $S_1 = \{A \in W^{-1}ASR^{n\times n} \mid AX=B\}$ is nonempty, $\widetilde{m} = \min\limits_{A\in S_1} r(A)$, $\widetilde{M} = \max\limits_{A\in S_1} r(A)$, and determine the W-para-anti-symmetric minimal and maximal rank solutions in S_1.

Key words: W-para-anti-symmetric matrix; matrix equation; maximal rank; minimal rank

(上接第 17 页)

参考文献:

[1] 程其襄,张奠宇.实变函数与泛函分析基础[M].3 版.北京:高等教育出版社,2010

[2] 胡冰,周其生.关于可测集用疏朗完备集逼近问题[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2006,23(6):539-542

[3] 周民强.实变函数论[M].2 版.北京:北京大学出版社,2008

Anther Proof on Lusin's Theorem

YE Yi-wei

(School of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: This paper presents a new proof of Lusin's Theorem. The main results are as follow: the relationship between the nonnegative bounded measurable functions and simple functions is estabished; and the continuity of function which is continuous on each disjoint closed set is dnalhzed, on the basis of which another proof of the well-known Lusin's Theorem is presented.

Key words: measurable function; simple function; uniform continuity; continuity