

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.005

条件 C 下的伪不变单调准则

潘正涛¹, 向丽娟, 刘晓静²

(1. 重庆师范大学 数学学院, 重庆 401331; 2. 重庆师范大学 图书馆, 重庆 401331)

摘要:在条件 C 下, 推导出伪不变凸单调与严格伪不变凸函数之间的关系.

关键词:伪不变凸; 广义不变凸; 条件 C

中图分类号: O177 **文献标识码:** A **文章编号:** 1672-058X(2015)04-0018-02

广义凸在数学、管理科学、工程学、经济学和最优化理论等领域中都发挥着重要的作用, 不变凸函数和不变凸单调又是研究广义凸性的重要组成部分, 文献[1-5]研究了关于广义不变凸与不变凸单调, 文献[3]在条件 C 下, 建立了伪不变凸单调与伪不变凸函数之间的关系. 此处, 在条件 C 下, 推导出伪不变凸单调与严格伪不变凸函数之间的关系.

1 预备知识

设 Γ 是 \mathbf{R}^n 中的非空子集, $\eta: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的向量值函数, $F: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$ 的向量值函数, $\theta: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$ 上可微函数.

定义 1^[3] 称集合 Γ 是关于 η 不变凸的, 若存在 $\eta: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使得对任意 $x, y \in \Gamma, \lambda \in [0, 1]$, 有

$$y + \lambda \eta(x, y) \in \Gamma$$

定义 2^[3] 设 $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$ 是关于 η 不变凸的, 称 $F: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是关于 η 在 $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$ 上的严格伪不变单调, 如果对任意不同的两点 $x, y \in \Gamma$, 有

$$\eta(x, y)^T F(x) \geq 0 \Rightarrow \eta(y, x)^T F(y) > 0$$

定义 3^[1] 设 $\Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集, 函数 $\theta: \Gamma \subseteq \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 映射, 有

(a) 称 θ 是伪不变凸单调函数, 若存在 $\eta: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使得对任意 $x, y \in \Gamma \subseteq \mathbf{R}^n$, 有

$$\eta(y, x)^T \nabla \theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) \geq 0$$

(b) 称 θ 是严格伪不变凸单调函数, 若存在 $\eta: \Gamma \times \Gamma \rightarrow \mathbf{R}^n$, 使得对任意 $x, y \in \Gamma \subseteq \mathbf{R}^n, x \neq y$, 有

$$\eta(y, x)^T \nabla \theta(x) \geq 0 \Rightarrow \theta(y) - \theta(x) > 0$$

条件 C^[3] 设 $\eta: X \times X \rightarrow \mathbf{R}^n$, 则对任意 $x, y \in \mathbf{R}^n$, 且对任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$\begin{aligned} \eta(y, y + \lambda \eta(x, y)) &= -\lambda \eta(x, y) \\ \eta(x, y + \lambda \eta(x, y)) &= (1 - \lambda) \eta(x, y) \end{aligned}$$

注: 由条件 C, 有

$$\eta(y + \bar{\lambda} \eta(x, y), y) = \bar{\lambda} \eta(x, y) \tag{1}$$

事实上, 很容易通过以下证明得到

$$\begin{aligned} \eta(y + \bar{\lambda} \eta(x, y), y) &= \eta(y + \bar{\lambda} \eta(x, y), y + \bar{\lambda} \eta(x, y) + \eta(y, y + \bar{\lambda} \eta(x, y))) = \\ &= -\eta(y, y + \bar{\lambda} \eta(x, y)) = \bar{\lambda} \eta(x, y) \end{aligned}$$

2 主要结果

定理1 若

- 1) $\Gamma \subset \mathbf{R}^n$ 是关于 η 的开不变凸集;
- 2) η 满足条件 C;
- 3) 对任意 $x \neq y, \theta(y) \geq \theta(x)$, 则存在 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, 使得 $\eta(x, y)^T \nabla \theta(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) < 0$;
- 4) $\nabla \theta$ 是关于 η 在 Γ 上的伪不变凸单调.

则 θ 是关于 η 在 Γ 上的严格伪不变凸函数.

证明 设 $x, y \in \Gamma, x \neq y$, 有

$$\eta(x, y)^T \nabla \theta(y) \geq 0 \quad (2)$$

需要证明

$$\theta(x) > \theta(y)$$

反证法:假设

$$\theta(x) \leq \theta(y) \quad (3)$$

由定理1中的条件3), 存在 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, 使得

$$\eta(x, y)^T \nabla \theta(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) < 0 \quad (4)$$

由式(4)和式(1), 存在 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, 使得

$$\eta(y + \bar{\lambda}\eta(x, y), y)^T \nabla \theta(y + \bar{\lambda}\eta(x, y)) < 0 \quad (5)$$

由 $\nabla \theta$ 是关于 η 的伪不变凸单调函数和式(5), 存在 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$, 使得

$$\eta(y + \bar{\lambda}\eta(x, y), y)^T \nabla \theta(y) < 0 \quad (6)$$

又由式(5)(6)和 $\bar{\lambda} \in (0, 1)$ 得

$$\eta(x, y)^T \nabla \theta(y) < 0 \quad (7)$$

式(7)与式(2)矛盾, 因此 θ 是关于 η 在 Γ 上的严格伪不变凸函数.

参考文献:

- [1] RUIZ GARZON G, OSUNA-GOMEZ R, RUFIAN-LIZANA A. Generalized Invex Monotonicity[J]. European Journal of Operational Research, 2003(144): 501-512
- [2] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Criteria for Generalized Invex Monotonicities[J]. European Journal of Operations Research, 2005(164): 115-119
- [3] YANG X M, YANG X Q, TEO K L. Generalized Invexity and Generalized Invariant Monotonicity[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003(117): 607-625
- [4] PENG J W. Criteria for Generalized Invex Monotonicities without Condition C[J]. European Journal of Operations Research, 2006(170): 667-671
- [5] 张其茂. 一类 B-预不变凸目标规划的最优性充分条件[J]. 重庆工商大学学报: 自然科学版, 2009, 30(6): 522-525

Quasi-invex Monotone Norm Under Condition C

PAN Zheng-tao¹, XIANG Li-juan, LIU Xiao-jing²

(1. College of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

2. Library, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: Under condition C, this thesis presents the relationship between quasi-invex monotone and strict quasi-invex functions.

Key words: quasi-invexity; generalized invex; Condition C