doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.004

鲁津定理的另一种证明*

叶 一 蔚

(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘　要:介绍了鲁津定理的另一种证明,建立了非负有界可测函数与简单函数的关系与闭集上连续函数的粘贴定理,在此基础上给出鲁津定理的证明.

关键词:可测函数;简单函数;一致连续;连续

中图分类号:O174.1　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2015)04-0016-02

鲁津定理揭示了可测函数与连续函数的关系,现行教材中,关于鲁津定理的证明大多以叶果洛夫定理为工具,而叶果洛夫定理仅在 meas $E<+\infty$才成立(E 是欧氏空间 $\mathbf{R}^N$ 中的一个可测集),因此鲁津定理的证明必须考虑 meas $E<+\infty$的情形和 meas $E=+\infty$的情形,证明过程比较复杂[1,2]. 受文献[3]的启发,此处改进了文献[1]中的证明方法,从非负有界可测函数与简单函数的关系入手,给出了鲁津定理的另一证明. 无论对 meas $E<+\infty$和 meas $E=+\infty$都成立.与文献[1]中原有的证明相比,该方法更简单,容易让学生理解.先介绍一些基本结论.

定义 1　设 $f(x)$ 的定义域 E 可分成有限个互不相交的可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$, $E=\cup_{i=1}^{k}E_i$,使得 $f(x)$ 在每个 E_i 上都等于某常数 c_i, 则称 $f(x)$ 为简单函数.

文献[1]的定理 7 建立了可测函数和简单函数的关系,即函数 $f(x)$ 在 E 上可测的充要条件是 $f(x)$ 总可表示为一列简单函数 $\{\varphi_n\}$ 的极限函数,其中 $|\varphi_1(x)|\leqslant|\varphi_2(x)|\leqslant\cdots\leqslant|\varphi_n(x)|$,对于非负有界的可测函数,有以下更强的结论.

引理 1(非负有界可测函数与简单函数的关系)　设 $f(x)$ 为 E 上的非负有界可测函数,则存在一列简单函数 $\{\varphi_n\}$,使得当 $n\to\infty$时,$\varphi_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

证明　令 $\psi_n(t)=[2^n t]/2^n$,当 $0\leqslant t<n$;$\psi_n(t)=n$,当 $n\leqslant t\leqslant+\infty$,$n=1,2,\cdots$,则 $\psi_n(t)$ 具有性质:

1) $\psi_n(t)\leqslant\psi_{n+1}(t)$, $n=1,2,\cdots$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(t)=t$;

3) 当 $n\to\infty$时,$\psi_n(t)$ 在有界闭区间 $[0,M]$ 上一致收敛于 t.

由于文献[1]定理 7 已给出性质 1)2)的证明,这里只验证性质 3).事实上,对任意 $\varepsilon>0$,取 $N>M$ 足够大满足 $2^{-N}<\varepsilon$,当 $n>N$ 时,对一切 $t\in[0,M]$,均有

$$|\psi_n(t)-t|=\left|\frac{[2^n t]}{2^n}-t\right|\leqslant\frac{1}{2^n}\leqslant\frac{1}{2^N}<\varepsilon$$

又令

收稿日期:2014-06-28;**修回日期:**2014-09-25.

* **基金项目:**国家自然科学基金项目资助(11471267).

作者简介:叶一蔚(1984-),女,重庆南岸区人,讲师,博士,从事非线性分析研究.

$$\varphi_n(x)=\psi_n(f(x))=\begin{cases}k/2^n, & x\in E[k/2^n\leqslant f<(k+1)/2^n] \quad (k=1,2,\cdots)\\ n, & x\in E[f\geqslant n]\end{cases}$$

则 $\varphi_n(x)$ 为 E 上的简单函数列,由于 $f(x)$ 非负有界,由性质 3)可知 $\varphi_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

引理 2　设 $A_i(i=1,2,\cdots,k)$ 为互不相交的闭集,若 f 在每个 A_i 上连续,则 f 在 $\cup_{i=1}^{k}A_i$ 上也连续.

证明　任取 $x_0\in\cup_{i=1}^{k}A_i$,则存在某个 i_0,使得 $x_0\in A_{i_0}$.注意到 f 在 A_{i_0} 上连续,f 在 x_0 连续,即对 $\forall\varepsilon>0$,存在 $\delta_1>0$,使得当 $x\in\cup(x_0,\delta_1)\cap A_{i_0}$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.又由于 $\{A_i\}_{i=1}^{k}$ 为互不相交的闭集,故 $x_0\notin\cup_{i\neq i_0}A_i$(闭集),$x_0\in C(\cup_{i\neq i_0}A_i)$(开集).从而存在 $\delta_2>0$,使得 $\cup(x_0,\delta_2)\subset C(\cup_{i\neq i_0}A_i)$.取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,有

$$\cup(x_0,\delta)\cap(\cup_{i=1}^{k}A_i)=\cup(x_0,\delta)\cap A_{i_0}\subset\cup(x_0,\delta_1)\cap A_{i_0}$$

因此,当 $x\in\cup(x_0,\delta)\cap(\cup_{i=1}^{k}A_i)$ 时,有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.又由 x_0 的任意性可知 f 在 $\cup_{i=1}^{k}A_i$ 上连续.

定理 1(鲁津定理)　设 $f(x)$ 是 E 上 a.e.有限的可测函数,则对任意 $\delta>0$,存在闭子集 $F_\delta\subset E$,使得 $f(x)$ 在 F_δ 上连续并且 $\text{meas}(E/F_\delta)<\delta$.

证明　1) $f(x)$ 为简单函数情形.由定义 1,存在互不相交的可测集 $E_1,E_2,\cdots,E_k$,使得 $E=\cup_{i=1}^{k}E_i$ 且 $f(x)=c_i(c_i\in\mathbf{R}),x\in E_i$.对任意 $\delta>0$,由 $E_i(i=1,2,\cdots,k)$ 可测,存在闭子集 $F_i\subset E_i$,使得 $m(E_i\setminus F_i)<\delta/k$.令 $F=\cup_{i=1}^{k}F_i$,则 F 为闭集且

$$\text{meas}(E\setminus F)=\text{meas}(\cup_{i=1}^{k}(E_i\setminus F_i))\leqslant\sum_{i=1}^{k}\text{meas}(E_i\setminus F_i)<\delta$$

又由引理 2 可知,f 在 F 上连续.

2) $f(x)$ 为非负可测的情形.令 $g(x)=f(x)/(1+f(x))$,$x\in E$,则 g 为非负有界的可测函数.根据引理 1,存在一列简单函数列 $\{\varphi_n\}$,使得 φ_n 在 E 上一致收敛于 $g(n\to\infty)$.注意到每个 φ_n 都为 E 上的简单函数,由 1)的结论,存在闭子集 $F_n\subset E$,使得 $\text{meas}(E\setminus F_n)<\delta/2^n$ 且 φ_n 在 F_n 上连续.令 $F=\cap_{n=1}^{\infty}F_n$,则 F 为闭集,

$$\text{meas}(E\setminus F)=\text{meas}(E\setminus\cap_{n=1}^{\infty}F_n)\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\text{meas}(E\setminus F_n)<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\delta}{2^n}\leqslant\delta$$

并且 φ_n 在 F 上一致收敛于 $g(n\to\infty)$.由一致收敛函数列的性质,g 在 F 上连续,从而 f 也在 F 上连续.

3) $f(x)$ 为一般函数情形.取 $f(x)=f^+(x)-f^-(x)$,其 $f^+(x)=\max\{f(x),0\}$,$f^-(x)=-\min\{f(x),0\}$.注意到 f^+,f^- 为 E 上的非负可测函数,由 2)的结论,存在闭子集 $F_i\subset E(i=1,2)$,使得 $\text{meas}(E\setminus F_i)<\delta/2$,

f^+ 在 F_1 上连续并且 f^- 在 F_2 上连续,令 $F=F_1\cap F_2$,则 F 为闭集,$f=f^+-f^-$ 在 F 上连续,并且

$$\text{meas}(E\setminus F)=\text{meas}(\cup_{i=1}^{2}(E\setminus F_i))\leqslant\sum_{i=1}^{2}\text{meas}(E\setminus F_i)<\delta$$

证毕.

鲁津定理的结论不能改成存在闭子集 $F\subset E$,使得 $\text{meas}(E/F)=0$ 且 f 在 F 上连续.

反例:令 $f(x)=-1$ 当 $x\in[-1,0)$;$f(x)=1$ 当 $x\in[0,1]$.若存在闭子集 $F_0\subset E:=[0,1]$ 使得 f 在 F_0 上连续且 $\text{meas}\left(\frac{E}{F_0}\right)=0$,则 $[-1/n,0]\cap F_0\neq\varnothing$ 且 $[0,1/n]\cap F_0\neq\varnothing$.这是因为如果 $[0,1/n]\cap F_0=\varnothing$,则 $[0,1/n]\subset\frac{E}{F_0}$,与 $\text{meas}\left(\frac{E}{F_0}\right)=0$ 矛盾.选取 $x_n\in[-1/n,0]\cap F_0$,$y_n\in[0,1/n]\cap F_0(n=1,2,\cdots)$.从而 $(x_n)\subset F_0$,$(y_n)\subset F_0$,$x_n\to0$ 并且 $y_n\to0(n\to\infty)$.由 f 在 F_0 上的连续性,有

$$-1=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(\lim_{n\to\infty}x_n)=f(0),\quad 1=\lim_{n\to\infty}f(y_n)=f(\lim_{n\to\infty}y_n)=f(0)$$

矛盾.

(下转第 31 页)