第 32 卷第 4 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 4 月
Vol. 32 NO.4 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Apr.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.002

# 一类生成 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 的 Kadison-Singer 格

李小奎，程乐乐，向玉玲，陈本菊
(重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

**摘　要**:研究了矩阵代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 中不变子空间投影格$\mathcal{L}$生成的 Von Neumann 代数$\mathcal{L}''$;证明了$\mathcal{L}$是生成 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 的 Kadison-Singer 格;并通过格的关系图给出了$\mathcal{L}$的 Hasses 关系图.

**关键词**:Kadison-Singer 格;Kadison-Singer 代数;矩阵代数

**中图分类号**:O177.1　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)04-0006-06

算子代数的产生可以追溯到 20 世纪 20 年代末,当时 Von Neumann (冯・诺依曼)建立了非自伴算子谱理论以后,于 1929 年引入了“算子环”的概念,后来被人们称之为 Von Neumann 算子代数.此类代数是在 Hilbert 空间上对伴随运算封闭,并且在强算子拓扑下闭的算子代数.之后几十年,Von Neumann 代数的三角子代数以及套代数[1,2]和自反代数等相继产生.

近几年来,葛力明、袁魏[3,4]研究了一类非自伴代数,他们称之为 Kadison-Singer 代数 (也称为 KS 代数).这类代数是自反的,因此一方面它可以由其对应的自反子空间格来完全决定,另一方面这类代数和它们所对应的子空间格所生成的 Von Neumann 代数又密切相关, 这使得可以利用 Von Neumann 代数的结构和运算的性质来研究自反子空间格上的相应理论.

文献[5]证明了无限维可分 Hilbert 空间上的极大套在某个秩投影下的单点扩张是个 KS 格;文献[6]证明 Hilbert 空间上的套在某个秩投影下的单点扩张是个 KS 格;文献[7]在以上结论的基础上,推广到 Hilbert 空间$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$中结论也成立.受文献[7]及以上作者的启发,此处将证明文献[7]的结论推广到一般的 Hilbert 空间$\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\cdots\oplus\mathcal{H}$中,结论仍然成立.

## 1　基本概念及术语

现在将回顾 Kadison-Singer 代数的基本概念及术语.设$\mathcal{H}$为可分的复 Hilbert 空间,$\mathcal{B}(\mathcal{H})$为$\mathcal{H}$上有界线性算子全体所构成的集合.相应地,设$\mathcal{L}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的子集,记$\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H}))$为其中全体投影,用 $\mathrm{Lat}(\mathcal{L})=\{P\in\mathcal{P}(\mathcal{B}(\mathcal{H})):(I-P)AP=0,\forall A\in\mathcal{L}\}$ 表示$\mathcal{L}$的不变投影格,其在强算子拓扑下是闭的.对于$\mathcal{B}(\mathcal{H})$中的正交投影 $\Gamma$,用 $\mathrm{Alg}(\Gamma)=\{A\in\mathcal{B}(\mathcal{H}):(I-P)AP=0,\forall P\in\Gamma\}$ 表示使得 $\Gamma$ 中每个正交投影都不变的有界线性算子所构成的代数.特别地,如果$\mathcal{L}=\mathrm{Lat}(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}))$则称$\mathcal{L}$是自反格.设$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的代数,如果$\mathcal{A}=\mathrm{Alg}(\mathrm{Lat}(\mathcal{A}))$,则称$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的自反子代数.$\mathcal{H}$中的套是指包含零算子 0 和恒等算子 $I$ 的投影的全序族$\mathcal{N}$,并且套$\mathcal{N}$在强算子拓扑下是闭的.

---

**收稿日期**:2014-05-13;**修回日期**:2014-10-08.

**作者简介**:李小奎(1987-),男,云南昭通人,硕士研究生,从事算子代数研究.

**定义 1**　设$\mathcal{A}$为 Hilbert 空间$\mathcal{H}$上的 Von Neumann 代数,并且满足:

(1)$\mathcal{A}$是一个自反代数;

(2)如果$\mathcal{B}$也是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的自反代数,并且$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$,如果$\mathcal{A}\cap\mathcal{A}^*=\mathcal{B}\cap\mathcal{B}^*$当且仅当$\mathcal{A}=\mathcal{B}$,那么称$\mathcal{A}$为 Kadison-Singer 代数(也称为 KS 代数).

**定义 2**　设$\mathcal{A}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的投影格,

$$\mathcal{L}'=\mathrm{Alg}(\mathcal{L})\cap(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}))^*=\{A:AB=BA,\forall B\in\mathcal{L}\}$$

为$\mathcal{L}$的一次换位子,$\mathcal{L}$的二次换位子$\mathcal{L}''$(Von Neumann 代数)是$\mathcal{L}'$的一次换位子,即$\mathcal{L}''=(\mathcal{L}')'$.

**定义 3**　设$\mathcal{L}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的投影格,称

$$\mathcal{L}'=\mathrm{Alg}(\mathcal{L})\cap(\mathrm{Alg}(\mathcal{L}))^*=\{A:AB=BA,\forall B\in\mathcal{L}\}$$

为$\mathcal{L}$的一次换位子,$\mathcal{L}$的二次换位子$\mathcal{L}''$(Von Neumann 代数)是$\mathcal{L}'$的一次换位子,即$\mathcal{L}''=(\mathcal{L}')'$.

**定义 4**　设$\mathcal{L}$是$\mathcal{B}(\mathcal{H})$的投影格,并且$\mathcal{L}$是生成 Von Neumann 代数$\mathcal{L}''$的最小自反格,如果 $\mathrm{Alg}(\mathcal{L})$是 Kadison-Singer 代数,则称$\mathcal{L}$是 Kadison-Singer 格(也称为 KS 格).

**定义 5**　设$\mathcal{A}$为 Hilbert 空间$\mathcal{H}$上的 Von Neumann 代数,$\mathcal{L}$为$\mathcal{A}$的一个投影格,若$\mathcal{L}$满足:

(1) $\mathcal{L}$是自反格;

(2) 若$\mathcal{B}\subseteq\mathcal{L}$也是自反格,并且$\mathcal{B}$生成 Von Neumann 代数$\mathcal{A}$当且仅当$\mathcal{B}=\mathcal{L}$,则称$\mathcal{L}$是$\mathcal{A}$的一个 KS 格.

**定义 6**[8]　设$\mathcal{L}$是 Banach 空间$\mathcal{H}$上的一个子空间格,$E\in\mathcal{L}$,定义:

(1) $E_-=\vee\{F\in\mathcal{L}:EF\neq E\},0_-=0$;

(2) $E_\#=\vee\{F\in\mathcal{L}:EF_-\neq E\}$.

**定理 1**[8-10]　设$\mathcal{L}$是 Banach 空间$\mathcal{H}$上的一个子空间格,则下列条件等价:

(1) $\mathcal{L}$是完全分配格;

(2) $E=E_\#,\forall E\in\mathcal{L}$.

## 2　主要结论

设$\mathcal{H}$是一个复可分的 Hilbert 空间,记 $H$ 是由 $m$ 个$\mathcal{H}$直和得到的 Hilbert 空间,$H=\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}\oplus\cdots\oplus\mathcal{H}$,$\mathcal{B}(H)$表示 $H$ 中的全体有界线性算子. 相应地设矩阵

$$\boldsymbol{A}\in\mathcal{H},\boldsymbol{B}\in\mathcal{H},\boldsymbol{A}\oplus\boldsymbol{B}\triangleq\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\\&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}\in\mathcal{H}\oplus\mathcal{H}$$

设 $\boldsymbol{E}_{ij}$表示第 $i$ 行第 $j$ 列位置上的元素为 1,其他位置全为 0 的矩阵,令

$$\boldsymbol{A}_k=\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{E}_{ii},k=1,2,\cdots,m;\boldsymbol{A}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\boldsymbol{E}_{ij};\boldsymbol{F}_l=\sum_{i=1}^{l\cdot m}\boldsymbol{E}_{ii}$$

以及

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_m&\cdots&\boldsymbol{I}_m\\\vdots&&\vdots\\\boldsymbol{I}_m&\cdots&\boldsymbol{I}_m\end{bmatrix}$$

其中 $I_m$ 表示 $H$ 上的恒等算子;$0,\boldsymbol{I}$ 分别表示 $H$ 上的零算子和恒等算子.记$\mathcal{L}$为

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=\{&0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},i,\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{F},\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l\vee\boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{F}:k=1,2,\cdots,m;\\&l=1,2,\cdots,n-1\}\end{aligned}\tag{1}$$

计算可得

$$\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{B}_2 & \cdots & \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots & \boldsymbol{B}_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{B}_3 & \cdots & \boldsymbol{B}_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

这里 $\boldsymbol{B}_1=\boldsymbol{I}_k\oplus\boldsymbol{M}_1$,其中的 $\boldsymbol{I}_k$ 表示 $K$ 阶单位矩阵;$\boldsymbol{B}_2=0_K\oplus\left(\boldsymbol{M}_1-\frac{1}{m}\sum_{i,j=1}^{m}\boldsymbol{E}_{ij}\right)$,这里的 $0_k$ 表示 $k$ 阶 0 矩阵;$\boldsymbol{B}_3=\frac{1}{n-1}\boldsymbol{I}_k\oplus\boldsymbol{M}_2$,其中 $\boldsymbol{M}_1,\boldsymbol{M}_2\in(\boldsymbol{M}_{mn}(\mathbb{C}))$ 分别为

$$\boldsymbol{M}_1 = \begin{bmatrix} \frac{m+n-k-1}{mn} & \frac{n-1}{mn} & \cdots & \frac{n-1}{mn} \\ \frac{n-1}{mn} & \frac{m+n-k-1}{mn} & \cdots & \frac{n-1}{mn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{n-1}{mn} & \frac{n-1}{mn} & \cdots & \frac{m+n-k-1}{mn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{M}_2 = \begin{bmatrix} \frac{(n-1)(m-k)+1}{(m-k)n(n-1)} & \frac{1}{(m-k)n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{(m-k)n(n-1)} \\ \frac{1}{(m-k)n(n-1)} & \frac{(n-1)(m-k)+1}{(m-k)n(n-1)} & \cdots & \frac{1}{(m-k)n(n-1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{1}{(m-k)n(n-1)} & \frac{1}{(m-k)n(n-1)} & \cdots & \frac{(n-1)(m-k)+1}{(m-k)n(n-1)} \end{bmatrix} \tag{3}$$

易知 $\boldsymbol{E}\vee\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}_0\vee\boldsymbol{E}\vee\boldsymbol{F}$,因此式(2)中只需 $k=0$ 即为 $\boldsymbol{E}\vee\boldsymbol{F}$.由此有如下结论:

**结论 1** 在 $\mathcal{B}(H)$ 中 $\mathcal{L}$ 是生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 的格.

**证明** 证明 $\mathcal{L}$ 是一个格,因为

$$\boldsymbol{A}_k \wedge \boldsymbol{A} = 0, \boldsymbol{A}_k \wedge \boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{A}_k \wedge \boldsymbol{F}_l = \boldsymbol{A}_k, \boldsymbol{A} \wedge \boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{F}_l \wedge \boldsymbol{F} = 0$$

以及 $\boldsymbol{A}_k\wedge\boldsymbol{F}_l=\boldsymbol{A}_k$,因此 $\forall P,Q\in\mathcal{L}$ 都有 $P\vee Q\in\mathcal{L}$ 和 $P\wedge Q\in\mathcal{L}$,因此 $\mathcal{L}$ 是一个格.

要证 $\mathcal{L}$ 生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$,只需证明 $\mathcal{L}$ 的一次交换子 $\mathcal{L}'$ 是平凡交换子即可,即证明 $\mathcal{L}'=\mathbb{C}I$ 即可.令

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{X}_{11} & \cdots & \boldsymbol{X}_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \boldsymbol{X}_{n1} & \cdots & \boldsymbol{X}_{nn} \end{bmatrix} \in \mathcal{B}(H), \boldsymbol{X}_{ij} \in M_{mn}(\mathbb{C}), i,j=1,2,\cdots,n \tag{4}$$

由 $\boldsymbol{F}_l\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_l$ 得到 $\boldsymbol{X}_{ij}=0_{m\times m}, i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$;由 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}$ 得到 $\boldsymbol{X}_{11}=\boldsymbol{X}_{22}=\cdots=\boldsymbol{X}_{nn}$;由 $\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_k, k=1,2,\cdots,m$ 得到

$$\boldsymbol{X}_{ii} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ 0 & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_{mm} \end{bmatrix}, i=1,2,\cdots,n \tag{5}$$

再由 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA}$ 得到

$$\sum_{k=1}^{m} x_{1k} = \sum_{k=2}^{m} x_{2k} = \cdots = x_{m-1,m-1} + x_{m-1,m} = x_{mm} \tag{6}$$

即得$\mathcal{L}'=\mathbb{C}I$,从而$\mathcal{L}$生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$.

**结论 2**　$\mathcal{L}$是生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$的一个自反格.

**证明**　$\mathcal{L}$是生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$的一个自反格,只需证明$\forall P\in\mathcal{L}$,都有 $P=P_{\#}$即可.由定义 5 以及定理 1 知是$\mathcal{L}$完全分配格,从而$\mathcal{L}$是自反格.

**结论 3**　$\mathcal{L}$是生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$的 Kadison-Singer 格.

**证明**　只需证明$\mathcal{L}$是极小生成 $M_{mn}(\mathbb{C})$的即可,即如果$\mathcal{L}_0\subseteq\mathcal{L}$是自反格,并且$\mathcal{L}_0$ 生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$,则当且仅当$\mathcal{L}_0=\mathcal{L}$,因此只需证明$\mathcal{L}_0$ 是由投影 $0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},I$ 所生成的自反格,其中 $k=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,n-1$.

(i) 如果 $\boldsymbol{F}_{n-1}\notin\mathcal{L}_0$,则

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F} : k=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,n-2\} \tag{7}$$

可取

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}\oplus\boldsymbol{I}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{I}\oplus\boldsymbol{M} \tag{8}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix}$ ,则

$$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA},\boldsymbol{F}_l\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{FX}=\boldsymbol{XF}$$

并且

$$\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}$$

均与 $\boldsymbol{X}$ 可交换,其中 $k=1,2,\cdots,m;m=1,2,\cdots,n-2$.从而可知 $\boldsymbol{X}\in\mathcal{L}_0'$,这与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}\boldsymbol{I}$ 矛盾,从而可知 $\boldsymbol{F}_{n-1}\in\mathcal{L}_0$.

(ii) 如果 $F_i\notin\mathcal{L}_0$,其中 $i$ 是从 1 到 $n-2$ 中的某一整数,又因为$(\boldsymbol{F}_i\vee\boldsymbol{F})\wedge\boldsymbol{F}_{n-1}=\boldsymbol{F}_i$ 且 $\boldsymbol{F}_{n-1}\in\mathcal{L}_0$,$(\boldsymbol{F}_i\vee\boldsymbol{F})\notin\mathcal{L}_0$,所以

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 \subseteq \{&0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: \\ &k=1,2,\cdots,m;l\neq i,l=1,2,\cdots,n-2\}\end{aligned} \tag{9}$$

此时取

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{I}\oplus\boldsymbol{M}\oplus\boldsymbol{I}\oplus\cdots\oplus\boldsymbol{I} \tag{10}$$

其中 $\boldsymbol{M}=\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} I & I \\ I & I \end{bmatrix}$ ,这里的 $\boldsymbol{M}$ 在分块矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的第 $k,k+1$ 行和 $k,k+1$ 列.则

$$\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}_k\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{XA},\boldsymbol{F}_l\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{FX}=\boldsymbol{XF}$$

并且

$$\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}$$

均与 $\boldsymbol{X}$ 可交换,其中 $k=1,2,\cdots,m;l\neq\mathcal{L};l=1,2,\cdots,n-2$.从而可知 $X\in\mathcal{L}_0'$,这与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}I$ 矛盾,因此$F_{n-1}\in\mathcal{L}_0$,$F_i\in\mathcal{L}_0$.

(iii) 如果 $\boldsymbol{A}\notin\mathcal{L}_0$,因为$(\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{A})\wedge(\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{F})=\boldsymbol{A}$,$k=1,2,\cdots,m-1$,并且$(\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{A}\vee\boldsymbol{F})\wedge\boldsymbol{F}_l=\boldsymbol{A}_k\vee\boldsymbol{F}$,但 $\boldsymbol{F}_l\in\mathcal{L}_0$,所以只有式(11)情况发生

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: k = 1,2,\cdots,m-1;l = 1,2,\cdots,n-1\} \tag{11}$$

此时取投影矩阵

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{11}\}$$

容易验证,$\mathcal{L}_0$ 与 $\boldsymbol{X}$ 均可交换,而且 $\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A}$,$k=1,2,\cdots,m-1$ 同样与 $\boldsymbol{X}$ 可交换.这说明 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_0'$,与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}\boldsymbol{I}$ 矛盾,从而可知 $\boldsymbol{F}_{n-1} \in \mathcal{L}_0$,因此 $\boldsymbol{F}_i \in \mathcal{L}_0$,$\boldsymbol{A} \in \mathcal{L}_0$.

(ⅳ) 如果 $\boldsymbol{A}_m \notin \mathcal{L}_0$,因为 $\boldsymbol{A}_{m-1} \vee \boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_m$,但 $\boldsymbol{A} \in \mathcal{L}_0$,所以 $\boldsymbol{A}_{m-1} \notin \mathcal{L}_0$,蕴含

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: i = 1,\cdots,m-2;l = 1,\cdots,m-1;l = 1,\cdots,n-1\} \tag{12}$$

此时取 $\boldsymbol{X}=\mathrm{diag}\{\boldsymbol{D},\boldsymbol{D},\cdots,\boldsymbol{D}\}$,其中

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{I}_m - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{m-1,m-1} + \boldsymbol{E}_{m,m}) + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{m-1,m} + \boldsymbol{E}_{m-1,m}) \tag{13}$$

可证 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_0'$,与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}\boldsymbol{I}$ 矛盾,因此 $\boldsymbol{A}_m \in \mathcal{L}_0$.

(ⅴ) 如果 $\boldsymbol{A}_{m-1} \notin \mathcal{L}_0$,因为 $\boldsymbol{A}_m \wedge (\boldsymbol{A}_{m-1} \vee \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}_{m-1}$,但 $\boldsymbol{A}_m \in \mathcal{L}_0$,因此 $\boldsymbol{A}_{m-1} \vee \boldsymbol{F} \notin \mathcal{L}_0$,此种情况包含于(ⅳ),从而可知 $\boldsymbol{A}_{m-1} \in \mathcal{L}_0$.

(ⅵ) 如果 $\boldsymbol{A}_k \notin \mathcal{L}_0$,因为 $\boldsymbol{E}_{m-1} \in \mathcal{L}_0$,并且

$$\boldsymbol{A}_{m-1} \wedge (\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A}_{m-1} \wedge (\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A}_{m-1} \wedge (\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{A}_k$$

当 $k \leqslant m-2$ 时成立,因此$(\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F}) \notin \mathcal{L}_0$,$(\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A}) \notin \mathcal{L}_0$ 以及$(A_k \vee A \vee F) \notin \mathcal{L}_0$.所以

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_i,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{F},\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_i \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_i \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_i \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: i \neq k,i = 1,2,\cdots,m-1;l = 1,2,\cdots,n-1\} \tag{14}$$

此时取

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{\boldsymbol{X}_1,\boldsymbol{X}_1,\cdots,\boldsymbol{X}_1\} \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{X}_1 = \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{E}_{ii} = \frac{1}{2}\sum_{i=k}^{k+1}\boldsymbol{E}_{ii} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{E}_{k,k+1} + \boldsymbol{E}_{k+1,k})$$

同理可证 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_0'$,产生矛盾.因此 $\boldsymbol{A}_k \in \mathcal{L}_0$,$k$ 为 $1,2,\cdots,n-2$ 中的任意一个整数.

(ⅶ) 最后证明 $\boldsymbol{F} \in \mathcal{L}_0$,假若 $\boldsymbol{F} \notin \mathcal{L}_0$,因为$(\boldsymbol{E} \vee \boldsymbol{F}) \wedge (\boldsymbol{E}_k \vee \boldsymbol{F}) = \boldsymbol{F}$,但是 $\boldsymbol{E}_{m-1} \vee \boldsymbol{F} \in \mathcal{L}_0$,因此

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: k = 1,2,\cdots,m;l = 1,2,\cdots,n-1\} \tag{16}$$

或者

$$\mathcal{L}_0 \subseteq \{0,\boldsymbol{A}_k,\boldsymbol{A},\boldsymbol{F}_l,\boldsymbol{I},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A},\boldsymbol{A}_m \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{F}_l \vee \boldsymbol{F},\boldsymbol{A}_k \vee \boldsymbol{A} \vee \boldsymbol{F}: k = 1,2,\cdots,m;l = 1,2,\cdots,n-1\} \tag{17}$$

对于式(16)取

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{0,\boldsymbol{E}_{11},\cdots,\boldsymbol{E}_{11}\}$$

易证 $\boldsymbol{X}$ 与$\mathcal{L}_0$ 中任意元素均可交换,因此 $\boldsymbol{X} \in \mathcal{L}_0'$,与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}\boldsymbol{I}$ 矛盾.

对于式(17),取

$$\boldsymbol{X} = \mathrm{diag}\{0,\boldsymbol{D},\cdots,\boldsymbol{D}\}$$

其中 $D=\frac{1}{m-1}\sum_{i,j=1}^{m}E_{ij}$,易证 $D\in\mathcal{L}_0'$,与$\mathcal{L}_0'=\mathbb{C}I$ 矛盾,这说明 $F\in\mathbb{C}_0$,从而 $I_0$ 由是由投影 $0,A_k,A,F_l,F,I$ 所生成的自反格,其中 $k=1,2,\cdots,m;l=1,2,\cdots,n-1$.所以$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0$.

综上所述,$\mathcal{L}$是生成 Von Neumann 代数 $M_{mn}(\mathbb{C})$ 的 Kadsion-Singer 格.其 Hasses 关系如图 1.

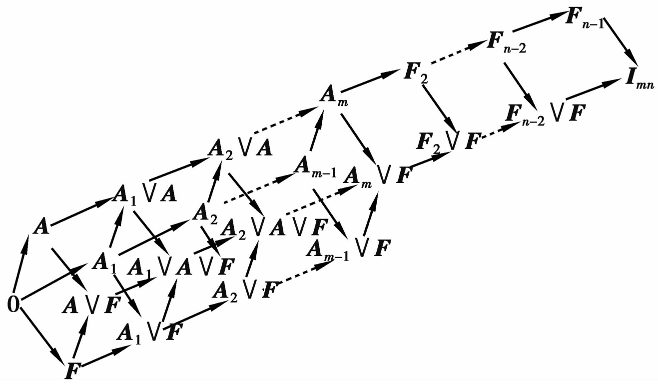


图 1　$\mathcal{L}$ 的 Hasses 关系图

**参考文献:**

[1] DAVODSON K R.Nest Algebras, Pitman Research Notes in Mathematics Series[M].New York: Longman Scientific&Technical,1988

[2] RICHARD Y,KADISON,JOHN R.On Some Algebra of Operators Ⅱ[M].New York: Proc London Math Soc,1966

[3] GE L M,YUAN W.Kadison-Singer Algebras Ⅰ[J].Proc Natl Acad USA,2010(5): 1838-1843

[4] GE L M,YUAN W.Kadison-Singer Algebras Ⅱ[J].Proc NatL Acad USA,2010(11): 4840-4844

[5] WU W M, YUAN W. On Generators of Abelian Kadison-Singer Algebras in Matrix Algebras[J]. Linear Algebras and Its Application,2014(1):197-205

[6] REN Y H,WU W M.Some New Classes of Kadison-Singer Lattices in Hilbert Spaces[J].Science in China Mathematics,2014,57(4): 837-846

[7] 胡长流,宋证明.格论初步[M].郑州:河南大学出版社,1999

[8] 鲁世杰,陆芳言,李鹏同,等.非自伴算子代数[M].北京:科学出版社,2004

## A class generates Mmm(ℂ) Matrix Algebras of kadsion-Singer Lattices

**LI Xiao-kui, CHENG Le-le, XIANG Yu-ling, CHEN Ben-ju**

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract**: This paper reseavches Von Neumann algebra $\mathcal{L}''$ generated by invariant subspace lattice $\mathcal{L}$ of mantrix algebra Mmm(ℂ) , and provesthat $\mathcal{L}$ is Kadison-Singer lattice generated by Mmm(ℂ), and gives the $\mathcal{L}$ diagram of Hasses.

**Key words**: Kadison-Singer lattices; Kadison-Singer algebra; matrix algebra