doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0004.001

一类特殊的 Bezout 矩阵*

吴　梅

(安徽大学 数学科学学院,合肥 230601)

摘　要:介绍了一类特殊的 Bezout 矩阵,即分裂 Bezoutian,并总结了分裂 Bezoutian 的相关性质;对 $\boldsymbol{B}_-$型分裂 Bezoutian 中元素表示的迭代关系式给予了证明;并建立了 $\boldsymbol{B}_-$型分裂 Bezoutian 与一类特殊的 Hankel 矩阵 $\boldsymbol{S}_n^{(j)}$ 之间的联系.

关键词: Bezout 矩阵;分裂 Bezoutian;Hankel 矩阵

中图分类号:O241　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2015)04-0001-05

Bezout 矩阵是由某一域上任意两个多项式生成的一类特殊的方阵,是一类对称矩阵.在对 Bezout 矩阵的研究过程中产生了许多深刻的结论,例如 Barnett 型分解公式[1] 以及三角分解公式[2].正是由于 Bezout 矩阵自身性质的特殊性和优良性,使得它在多项式惯性、稳定性问题以及控制理论、系统理论等方面都有着重要的应用[3-6].此处将根据 Bezout 矩阵的相关性质,对分裂 Bezoutian 这一特殊 Bezout 矩阵进行初步的探讨和研究.

1　预备知识

此处阶翻转矩阵记为 $\boldsymbol{J}_n=\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \ddots & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}$,对于向量 $\boldsymbol{n}\in F^n$,若 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}^J=\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{n}$,称 $\boldsymbol{n}$ 为对称向量;若 $\boldsymbol{n}=-\boldsymbol{n}^J=-\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{n}$,则称 $\boldsymbol{n}$ 为反对称向量.同理对于矩阵 $\boldsymbol{M}\in F^{m\times n}$,若 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}^J=\boldsymbol{J}_m\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}_n$,称 $\boldsymbol{M}$ 为中心对称矩阵;若 $\boldsymbol{M}=-\boldsymbol{M}^J=-\boldsymbol{J}_m\boldsymbol{M}\boldsymbol{J}_n$,则称 $\boldsymbol{M}$ 为中心反对称矩阵. $\boldsymbol{q}(x)=\sum\limits_{i=0}^{n}q_it^i$ 称为向量 $\boldsymbol{q}=[q_i]_{i=0}^{n}\in F^{n+1}$的生成多项式.类似地,二元多项式 $\boldsymbol{M}(x,y)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}m_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{M}=[m_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$的生成多项式.可以得到关于 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in F^{n+1}$的 $n\times n$ 阶 $\boldsymbol{H}$-Bezoutian 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的生成多项式 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{H}}(x,y)$ [7]:

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{H}}(x,y)=\frac{\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(y)-\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{f}(y)}{x-y}$$

同理得到关于 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in F^{n+1}$的 $n\times n$ 阶 $\boldsymbol{T}$-Bezoutian $\boldsymbol{B}$ 的生成多项式 $B_{\mathrm{T}}(x,y)$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}(x,y)=\frac{\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(y^{-1})y^n-\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{f}(y^{-1})y^n}{1-xy}\tag{1}$$

如果 $\boldsymbol{f}=[f_i]_{i=0}^{n}$和 $\boldsymbol{g}=[g_i]_{i=0}^{n}$已知,则 $\boldsymbol{T}$-Bezoutian $\boldsymbol{B}$ 的元素 $b_{i,j}(i,j=1,2,\cdots,n)$满足迭代关系式:

$$b_{i,j}=b_{i-1,j-1}+f_{i-1}g_{n-j+1}-g_{i-1}f_{n-j+1},1\leqslant i,j\leqslant n\tag{2}$$

由式(1)可知:

收稿日期:2014-07-04;**修回日期:**2014-09-25.

* **基金项目:**安徽省自然科学基金(1208085MA02).

作者简介:吴梅(1990-),女,安徽六安人,硕士研究生,从事矩阵与算子理论研究.

$$\begin{aligned}(1-xy)\boldsymbol{B}_{\mathrm{T}}(x,y)=&\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(y^{-1})y^{n}-\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{f}(y^{-1})y^{n}=\\&\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{J}}(y)-\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{f}^{\boldsymbol{J}}(y)=\\&\sum_{i=1}^{n}f_ix^i\sum_{j=1}^{n}g_jy^{n-j}-\sum_{i=1}^{n}g_ix^i\sum_{j=1}^{n}f_jy^{n-j}=\\&\sum_{i=1}^{n}f_ix^i\sum_{j=1}^{n}g_{n-j}y^j-\sum_{i=1}^{n}g_ix^i\sum_{j=1}^{n}f_{n-j}y^j=\\&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(f_ig_{n-j}-g_if_{n-j})\,x^iy^j\end{aligned}\tag{3}$$

又有 $\sum_{i,j=1}^{n}(1-xy)b_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}=\sum_{i,j=1}^{n}b_{i,j}(x^{i-1}y^{j-1}-x^iy^j)$，对比等式(3)两边 x^iy^j 的系数可以得到 $b_{i-1,j-1}-b_{i,j}=f_ig_{n-j}-g_if_{n-j}$，从而式(2)成立.这里需要指出的是,没有定义的元素均为 0,例如 $b_{0j}=b_{i0}=0$.

引理 1 如果 $\boldsymbol{A}_n$ 是对称(反对称)Toeplitz 矩阵的逆,或是中心对称(中心反对称)$\boldsymbol{T}+\boldsymbol{H}$−Bezoutian 的逆,则 $\boldsymbol{A}_n$ 可以表示成两个特别的 $\boldsymbol{T}+\boldsymbol{H}$−Bezoutian $\boldsymbol{B}_+$ 和 $\boldsymbol{B}_-$ 的和,即 $A_n=\boldsymbol{B}_++\boldsymbol{B}_-$,且 A_n 的生成多项式可以表示如下:

$$\boldsymbol{B}_{\pm}(x,y)=\frac{\boldsymbol{f}_{\pm}(x)\,\boldsymbol{g}_{\pm}(y)-\boldsymbol{g}_{\pm}(x)\,\boldsymbol{f}_{\pm}(y)}{(x-y)\,(1-xy)}\tag{4}$$

其中,$\boldsymbol{f}_+,\boldsymbol{g}_+\in F^{n+2}$ 是对称向量,$\boldsymbol{f}_-,\boldsymbol{g}_-\in F^{n+2}$ 是反对称向量.

2 分裂 Bezoutian 的定义、元素表示和基本性质

定义 1 用多项式的语言来表述转换 $\Lambda:F^{n\times n}\to F^{(n+2)\times(n+2)}$

$$(\Lambda\boldsymbol{B})(x,y)=(x-y)(1-xy)\boldsymbol{B}(x,y)\tag{5}$$

矩阵 $\boldsymbol{B}\in F^{n\times n}$ 称为分裂 Bezoutian,若存在向量 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in F^{n+2}$ 都是对称(反对称)的,使得式(6)成立

$$(\Lambda\boldsymbol{B})(x,y)=\boldsymbol{f}(x)\boldsymbol{g}(y)-\boldsymbol{g}(x)\boldsymbol{f}(y)\tag{6}$$

这里分裂 Bezoutian $\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}$ 记作 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$.

2.1 元素表示

由分裂 Bezoutian $\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}$ 的对称性质可知,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}$ 的全部元素可以较容易获得.若 $\boldsymbol{B}=[b_{i,j}]_{i,j=1}^{n}$,则

$$\Lambda\boldsymbol{B}=[b_{i-1,j}+b_{i-1,j-2}-b_{i,j-1}-b_{i-2,j-1}]_{i,j=1}^{n+2}\tag{7}$$

由式(5)可知

$$\begin{aligned}(\Lambda\boldsymbol{B})(x,y)=&(x-y)(1-xy)\boldsymbol{B}(x,y)=\\&(x-y-x^2y+xy^2)\boldsymbol{B}(x,y)=\\&(x-y-x^2y+xy^2)\sum_{i,j=1}^{n}b_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}=\\&\sum_{i,j=1}^{n+2}\hat{b}_{i,j}x^{i-1}y^{j-1}\end{aligned}$$

比较 $x^{i-1}y^{j-1}$ 系数可得式(7)成立.

2.2 基本性质

2.2.1 线性性

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\alpha\boldsymbol{f}+\beta\boldsymbol{g},\eta\boldsymbol{f}+\lambda\boldsymbol{g})=(\alpha\lambda-\beta\eta)\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}),\alpha,\beta,\eta,\gamma\in F$$

特别地,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\alpha\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})=\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{f},\alpha)=\alpha\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$.

2.2.2 对称性

1) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$;

2) 若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 为对称向量,则 $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{B}$;若 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 为反对称向量,则 $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_n=-\boldsymbol{B}$;

3) $\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{B}$.

证明 1)$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}$,可由 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{s}}$ 定义得到.

2) $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 为对称向量时,令 $\boldsymbol{\pi}(x)=(1,x,x^2,\cdots,x^{n+1})$,$\boldsymbol{\pi}(y)=(1,y,y^2,\cdots,y^{n+1})$,

$$\pi(x)\boldsymbol{B}\pi(y)^{\mathrm{T}}=\frac{\pi(x)\boldsymbol{f}\pi(y)\boldsymbol{g}-\pi(x)\boldsymbol{g}\pi(y)\boldsymbol{f}}{(1-xy)(x-y)}$$

$$\pi(x)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{B}\pi(y)^{\mathrm{T}}=\frac{\pi(x)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{f}\pi(y)\boldsymbol{g}-\pi(x)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{g}\pi(y)f}{(1-xy)(x-y)}$$

记 $\pi(x)\boldsymbol{J}_n=\pi(\Delta)$,则

$$\pi(\Delta)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{B}\pi(y)^{\mathrm{T}}=\frac{\pi(\Delta)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{f}\pi(y)\boldsymbol{g}-\pi(\Delta)\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{g}\pi(y)\boldsymbol{f}}{(1-xy)(x-y)}=\frac{\pi(\Delta)\boldsymbol{f}\pi(y)\boldsymbol{g}-\pi(\Delta)\boldsymbol{g}\pi(y)f}{(1-xy)(x-y)}$$

即可得到 $\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}$,同理可得 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}_n=\boldsymbol{B}$.$\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$ 为反对称向量时,可用同样方法证明之.

3）由上述结果可得,$\boldsymbol{B}^{J}=\boldsymbol{J}\boldsymbol{B}\boldsymbol{J}=\boldsymbol{B}$.

2.2.3　三角分解公式

分裂 Bezoutian $\boldsymbol{B}$ 可以表示成两个下三角、上三角 Toeplitz 矩阵乘积之和,即满足三角分解公式.

设 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$,则 $\boldsymbol{B}$ 可以表示如下:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} f_0 & & & \\ f_1 & f_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ f_{n-1} & \cdots & f_1 & f_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} & \cdots & g_1 \\ & g_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g_{n-1} \\ & & & g_n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_1 \\ & f_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f_{n-1} \\ & & & f_n \end{bmatrix}$$

由式(2)可得以下等式:

$$b_{11}=b_{00}+f_0g_n-g_0f_n,\ b_{12}=b_{01}+f_0g_{n-1}-g_0f_{n-1},\cdots,b_{1n}=b_{0n-1}+f_0g_1-g_0f_1$$

$$b_{21}=b_{10}+f_1g_n-g_1f_n,\ b_{22}=b_{11}+f_1g_{n-1}-g_1f_{n-1},\cdots,b_{2n}=b_{1n-1}+f_1g_1-g_1f_1$$

$$\vdots$$

$$b_{n1}=b_{n-10}+f_{n-1}g_n-g_{n-1}f_n,\ b_{n2}=b_{n-11}+f_{n-1}g_{n-1}-g_{n-1}f_{n-1},\cdots,b_{nn}=b_{n-1n-1}+f_{n-1}g_1-g_{n-1}f_1$$

又 $b_{0j}=b_{i0}=0$,特别地 $b_{00}=0$,则

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} b_{11}-b_{00} & b_{12}-b_{01} & \cdots & b_{1n}-b_{0n-1} \\ b_{21}-b_{10} & b_{22}-b_{11}+b_{11}-b_{00} & \cdots & b_{2n}-b_{1n-1}+b_{1n-1}-b_{0n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}-b_{n-10} & b_{n2}-b_{n-11}+b_{n-11}-b_{n-20} & \cdots & b_{nn}-b_{n-1n-1}+b_{n-1n-1}-b_{n-2n-2}+\cdots+b_{11}-b_{00} \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} f_0g_n-g_0f_n & f_0g_{n-1}-g_0f_{n-1} & \cdots & f_0g_1-g_0f_1 \\ f_1g_n-g_1f_n & f_1g_{n-1}+f_0g_n-g_1f_{n-1}-g_0pf_n & \cdots & f_1g_1+f_0g_2-g_1f_1-g_2f_0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{n-1}g_n-g_{n-1}f_n & f_{n-1}g_{n-1}+f_{n-2}g_n-g_{n-1}f_{n-1}-g_{n-2}f_n & \cdots & f_{n-1}g_1+f_{n-2}g_2+\cdots+f_0g_n-g_{n-1}f_1-g_0f_n \end{bmatrix}=$$

$$\begin{bmatrix} f_0 & & & \\ f_1 & f_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ f_{n-1} & \cdots & f_1 & f_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} g_n & g_{n-1} & \cdots & g_1 \\ & g_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & g_{n-1} \\ & & & g_n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} g_0 & & & \\ g_1 & g_0 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ g_{n-1} & \cdots & g_1 & g_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_n & f_{n-1} & \cdots & f_1 \\ & f_n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & f_{n-1} \\ & & & f_n \end{bmatrix}$$

3 $\boldsymbol{B}_-$型分裂 Bezoutian 元素表示的迭代关系式以及其与 $\boldsymbol{S}_n^{(j)}$ 之间的联系

引理 2 已知向量 $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$,定义 $a_{ij}=f_i g_j-g_i f_j$,$m=\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$ 表示不超过$\dfrac{n+1}{2}$的最大整数,则 $\boldsymbol{B}_-$ 中的元素满足下述迭代关系式:

$$b_{i,j}=a_{i,j-1}+b_{i-1,j-1}+b_{i+1,j-1}-b_{i,j-2},\ i=j,j+1,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,m \tag{8}$$

n 为奇数时,$b_{m+1,j-1}=-b_{m-1,j-1}$;n 为偶数时,$b_{m+1,j-1}=-b_{m,j-1}$.

引理 3 $\boldsymbol{B}_-$可以表示成基矩阵 $\boldsymbol{B}_-^{i,j}$的线性组合,$\boldsymbol{B}_-=a_{j,i}\sum\limits_{i,j}\boldsymbol{B}_-^{i,j}$,$n$ 为奇数时,$i=0,1,\cdots,m-2$,$j=i+1,\cdots,m-1$;n 为偶数时,$i=0,1,\cdots,m-1$,$j=i+1,\cdots,m$.

定理 1 令

$$\overline{\boldsymbol{H}}{}_n^j=-\boldsymbol{B}_-^{0,j+1},j=0,1,\cdots,l-2;\overline{\boldsymbol{H}}{}_{n-2k,n}^j=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}O_k & \overline{\boldsymbol{H}}{}_{n-2k}^j & O_k\end{pmatrix},j=0,1,\cdots,m-1$$

$$\boldsymbol{S}_{n-2k,n}^{(j)}=\mathrm{diag}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_k & \boldsymbol{S}_{n-2k}^{(j)} & \boldsymbol{O}_k\end{pmatrix}$$

则有

$$\overline{\boldsymbol{H}}{}_n^j=(I_n-J_n)S_n^{(j)},j=0,1,\cdots,l-2 \tag{9}$$

n 为奇数时,$\overline{\boldsymbol{H}}{}_n^{m-1}=\boldsymbol{O}_n$;$n$ 为偶数时,$\overline{\boldsymbol{H}}{}_n^{m-1}=(I_n-J_n)S_n^{(m-1)}$,并有

$$\overline{\boldsymbol{H}}{}_{n-2k,n}^j=(I_n-J_n)S_{n-2k,n}^{(j)} \tag{10}$$

这里将 n 阶矩阵 $\boldsymbol{S}_n^{(j)}$ 定义如下:

$$\boldsymbol{S}_n^{(0)}=\boldsymbol{I}_n,\boldsymbol{S}_n^{(1)}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&\cdots&0\\1&0&1&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&1&0&1\\0&\cdots&\cdots&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{S}_n^{(2)}=\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{0\quad0}}^{2}\hphantom{\quad1\quad\ddots\quad\ddots\quad\ddots\quad0}\\\begin{bmatrix}0&0&1&&\cdots&\cdots&0\\0&1&0&\ddots&&&\vdots\\1&0&1&\ddots&\ddots&&\vdots\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&\ddots&1&0&1\\\vdots&&&\ddots&0&1&0\\0&\cdots&\cdots&&1&0&0\end{bmatrix}\end{array}$$

$$\cdots$$

$$\boldsymbol{S}_n^{(j)}=\begin{array}{c}\overbrace{\hphantom{0\quad\cdots\quad\cdots\quad0}}^{j-1}\hphantom{\quad1\quad0\quad\cdots\quad\cdots\quad0}\\\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&0&1&0&\cdots&\cdots&0\\\vdots&&\iddots&1&0&1&\ddots&&\vdots\\\vdots&\iddots&\iddots&\iddots&&\ddots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&1&\iddots&&&&\ddots&1&0\\1&0&&&&&&0&1\\0&1&\ddots&&&&\iddots&1&0\\\vdots&\ddots&\ddots&\ddots&&\iddots&\iddots&\iddots&\vdots\\\vdots&&\ddots&1&0&1&\iddots&&\vdots\\0&\cdots&\cdots&0&1&0&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}\end{array}$$

上标 j 表示第一行中第一个非零元素之前的零元素的个数.

证明 由已知条件知

$$\overline{\boldsymbol{H}}_n^j = -\boldsymbol{B}_-^{0,j+1} = -\boldsymbol{B}_s(1-x^{n+1}, -x^{n-j}) =$$

$$-\frac{(1-x^{n+1})(y^{j+1}-y^{n-j})-(1-y^{n+1})(x^{j+1}-x^{n-j})}{(x-y)(1-xy)} =$$

$$\frac{(1-x^{n-j}y^{n-j})(x^{j+1}-y^{j+1})+(1-x^{j+1}y^{j+1})(y^{n-j}-x^{n-j})}{(x-y)(1-xy)} =$$

$$(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\boldsymbol{S}_n^{(j)}\begin{pmatrix}1\\y\\\vdots\\y^{n-1}\end{pmatrix}-(1,x,x^2,\cdots,x^{n-1})\boldsymbol{J}_n\boldsymbol{S}_n^{(j)}\begin{pmatrix}1\\y\\\vdots\\y^{n-1}\end{pmatrix}$$

从而式(9)成立,同理可以证明式(10)的成立.

定理 2 分裂 Bezoutian $\boldsymbol{B}_- = \boldsymbol{B}_s(\boldsymbol{f},\boldsymbol{g})$ 可以表示成定理 1 中给出的这一类特殊的 Hankel 矩阵的线性组合,即 $\boldsymbol{B}_- = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} a_{ji}\overline{\boldsymbol{H}}_{n-2i,n}^{j-i-1}$,其中,$a_{ji}$同引理 2 中定义一致.

证明 由式(10),$\overline{\boldsymbol{H}}_{n-2k,n}^{j} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{J}_n)S_{n-2k,n}^{(j)} = (\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{J}_n)\operatorname{diag}\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}_k & \boldsymbol{S}_{n-2k}^{(j)} & \boldsymbol{O}_k\end{pmatrix}$,从而可得 $\overline{\boldsymbol{H}}_{n-2k,n}^{j} = -\boldsymbol{B}_-^{k,j+k+1}$.

由引理 3 得

$$\boldsymbol{B}_- = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}\boldsymbol{B}_-^{i,j} = -\sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} a_{ij}\overline{\boldsymbol{H}}_{n-2i,n}^{j-i-1} = \sum_{i=0}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} a_{ji}\overline{\boldsymbol{H}}_{n-2i,n}^{j-i-1}$$

故定理 2 得证.

参考文献:

[1] BARNETT S.A Note on the Bezoutian Matrix[J].SIAM J Appl Math,1972(22):84-86

[2] YANG Z H,CUI B F.On the Bezoutian Matrix for Chebyshev Polynomials[J].Applied Mathematics and Computation ,2012,219(3):1183-1192

[3] BARNETT S.Polynomials and Linear Control Systems[M].New York :Marcel Dekker,1983

[4] HELMKE U,FUHRMANN P A.Bezoutians,Linear Algebra and its Applications[J].1989,22(124):1039-1097

[5] LANCASTER P,ROST M.Algebraic Methods for Toeplitz-like Matrices and Operators[J].Operaror Theory,Bikhäuser,Basel,1984(13):402-410

[6] GOVER M J,BARNETT S.A Generalized Bezoutian Matrix[J].Linear Multilinear Algebra,1990(27):33-48

[7] VLASTIMILtǘk.Explicit Expressions for Bezoutians[J].Linear Algebra and its Applications,1984(59):43-54

[8] 刘冰,张羽乾.Bernstein-Bezoutian 矩阵的若干性质[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2011,28(4):339-442

A Special Class of Bezout Matrix

WU Mei

(School of Mathematical Sciences, Anhui University , Hefei 230601)

Abstract: Firstly this paper introduces a special class of Bezout matrix named split Bezoutian and summarizes its properties. Secondly the proof on the recursion relation in split Bezoutian of B_ type is obtained. Finally the relation between split Bezoutian of B_type and a special class of Hankel matrix$S_n^{(j)}$ is constructed.

Key words: Bezout matrix; split Bezoutian; Hankel matrix