doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0003.005

基于斑块环境下 SIS 传染病模型局部稳定性分析

杨 文 川

(重庆师范大学 数学学院,重庆 400047)

摘　要:首先在双线性传染率 βSI 和不考虑种群之间迁移问题的 SIS 传染病模型的基础上,改进并增加种群迁移带来的影响条件,并建立一个更加符合实际意义的 SIS 传染病模型;在模型满足一定条件和符合实际意义下,平衡点存在的基础上,利用基本再生数 R_0 和特征值理论分析得出,在 $R_0\leqslant 1$ 时无病平衡点局部渐近稳定的充分条件;进一步利用基本再生数 R_0 和分块矩阵理论得出,当 $R_0>1$ 时地方病平衡点局部渐近稳定的充分条件;模型的建立和研究进一步丰富了传染病模型。

关键词:SIS 传染病模型;无病平衡点;地方病平衡点;基本再生数

中图分类号:O192　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-058X(2015)03-0021-04

0 引 言

当今世界面临许多传染病问题,预防和控制传染病是当今世界最为棘手的问题[1]。因此建立数学模型对传染病进行分析是很有意义的研究课题。通常把总人口大致分成二部分:易感者(S)和感染者(I)。通常用模型表示[2]:

$$\begin{aligned} s' &= a - \beta SI - bS + dI \\ I' &= \beta SI - (b+d)I \end{aligned} \tag{1}$$

其中 a 表示单位时间人口迁入数量,b 表示人口自然死亡率,d 表示感染者通过治疗变成了易感者的变化率,其中 βSI 表示传染病的传然率,β 是传播系数。传染率是传染病中非常重要和不可缺少的因数,关于不同传染率对传染病模型的影响问题被许多数学专家研究分析。例如,文献[3,4]中的传染率表示为$\frac{\beta SI}{1+\alpha I}$,文献[5]主要考虑的非线性传染率为$\frac{\beta SI}{\omega+I}$,文献[6]主要考虑这样一个非线性传染率$\frac{\beta SI}{1+I}$,等。考虑模型的特点,采用的非线性传染率为$\frac{\beta SI}{1+mS}$。除了传染率对传染病的影响以外,另一个因数即种群迁移问题也是最近被大家广泛讨论的热点问题。例如,文献[2,7]主要考虑在两个斑块间的种群流动给传染病带来的影响。文献[8]中考虑了 n 个斑块间传染率为$\frac{\beta SI}{S+I}$的 SIS 传染病模型。

基于以上两点建立 SIS 传染病模型:

收稿日期:2014-09-10;**修回日期:**2014-10-21.

作者简介:杨文川(1988-),男,四川商阳人,硕士研究生,从事微分动力系统研究.

$$\begin{cases} S'_1 = a - \dfrac{\beta S_1 I_1}{1 + mS_1} - bS_1 + dI_1 + \alpha S_2 - \alpha S_1 \\ I'_1 = \dfrac{\beta S_1 I_1}{1 + mS_1} - (b + d + \alpha) I_1 + \alpha I_2 \\ S'_2 = a - \dfrac{\beta S_2 I_2}{1 + mS_2} - bS_2 + dI_2 - \alpha S_2 + \alpha S_1 \\ I'_2 = \dfrac{\beta S_2 I_2}{1 + mS_2} - (b + d + \alpha) I_2 + \alpha I_1 \end{cases} \tag{2}$$

其中 α 表示二个斑块间的转移率,其他字母意义与式(1)相同。由实际意义出发总是假设 α,β,a,b,d 非负,$\dfrac{\beta S_i I_i}{1+mS_i}(i=1,2)$为非线性传染率[9]。

现在定义基本再生数为 $R_0=\dfrac{\beta a}{(ma+b)(b+d)}$,并且由模型(2)易求在 $R_0\leqslant 1$ 时存在唯一的无病平衡点 $E_0=(\dfrac{a}{b},0,\dfrac{a}{b},0)$,在 $R_0>1$ 时存在唯一的地方平衡点 $E^*=(S^*,I^*,S^*,I^*)$,其中 $S^*=\dfrac{a}{ma(R_0-1)+bR_0}$,$I^*=\dfrac{(ma^2+ab)(R_0-1)}{ma(R_0-1)+bR_0}$。

1 无病平衡点的局部稳定性

主要讨论模型(2)在无病平衡点的局部稳定的充分条件。

定理 1 当 $R_0<1$ 时,系统(2)在无病平衡点 $E_0=(\dfrac{a}{b},0,\dfrac{a}{b},0)$处渐近稳定。

证 系统(2)的雅可比矩阵

$$\boldsymbol{J}(S_1,I_1,S_2,I_2)=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C}\end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta I_1}{(1+mS_1)^2}-b-\alpha & -\dfrac{\beta S_1}{1+mS_1}+d \\ \dfrac{\beta I_1}{(1+mS_1)^2} & \dfrac{\beta S_1}{1+mS_1}-b-d-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\alpha & 0\\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta I_2}{(1+mS_2)^2}-b-\alpha & -\dfrac{\beta S_2}{1+mS_2}+d \\ \dfrac{\beta I_2}{(1+mS_2)^2} & \dfrac{\beta S_2}{1+mS_2}-b-d-\alpha \end{pmatrix}$$

将无病平衡点 $E_0=(\dfrac{a}{b},0,\dfrac{a}{b},0)$代入雅可比矩阵中则有

$$\boldsymbol{J}(E_0)=\begin{pmatrix} -b-\alpha & \dfrac{-\beta a}{ma+b}+d & \alpha & 0 \\ 0 & \dfrac{\beta a}{ma+b}-d-b-\alpha & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & -b-\alpha & \dfrac{-\beta a}{ma+b}+d \\ 0 & \alpha & 0 & \dfrac{\beta a}{ma+b}-d-b-\alpha \end{pmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{J}(E_0)$ 对应特征方程的特征根分别为

$$\lambda_1=-b,\lambda_2=-b-2\alpha,\lambda_3=\frac{\beta a}{ma+b}-b-d,\lambda_4=\frac{\beta a}{ma+b}-b-d-2\alpha.$$

当 $R_0<1$ 时,$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4$ 均为负根,系统(2)在无病平衡点 E^0 处是渐近稳定的。

2　地方平衡点的局部稳定性

定理 2　若 $R_0>1$ 时,地方病平衡点渐近稳定。

证　将地方平衡点 E^* 代入雅克比矩阵中则有

$$\boldsymbol{J}(E^*)=\begin{pmatrix} \boldsymbol{D} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$$

其中

$$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}-b-\alpha & -\dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}+d \\ \dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2} & \dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d-\alpha \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

利用分块矩阵的理论,则有

$$\det(\boldsymbol{J}(E^*)-\lambda\boldsymbol{I})=\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B} & \boldsymbol{D}-\lambda\boldsymbol{I} \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} \boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ 0 & \boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I} \end{pmatrix}=\det(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I})\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}-\lambda\boldsymbol{I})$$

其中

$$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} -\dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}-b & -\dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}+d \\ \dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2} & \dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d \end{pmatrix}$$

而且当 $R_0>1$ 时有

$$\frac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d<0$$

则迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B})<0$。下面讨论在 $R_0>1$ 时 $\det(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B})$ 正负情况。

$$\det(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B})=-\left[\frac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}+b\right]\left[\frac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d\right]+\left[\frac{\beta S^*}{1+mS^*}-d\right]\left[\frac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}\right]=$$

$$\left[-b\left(\frac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d\right)+b\frac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}\right]>0$$

因此,迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B})<0$,$\det(\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B})>0$,$\boldsymbol{D}+\boldsymbol{B}$ 有两个负实根。

当 $R_0>1$ 时

$$\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-\dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2}-b-2\alpha & -\dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}+d\\ \dfrac{\beta I^*}{(1+mS^*)^2} & \dfrac{\beta S^*}{1+mS^*}-b-d-2\alpha\end{pmatrix}$$

同理可证,迹 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B})<0$,$\det(\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B})>0$。所以 $\boldsymbol{D}-\boldsymbol{B}$ 的特征值有两个负实数根。

综上所述,在 $R_0>1$ 时 $\boldsymbol{J}(E^*)$ 的特征方程的所有特征根都是负实数,因此系统(2)在地方平衡点 $E^*=(S^*,I^*,S^*,I^*)$ 处局部渐近稳定。

参考文献:

[1] 陆征一,王稳地.生物数学前言[M].北京:科学出版社,2008

[2] YASUHIRO T, XIAN N, JIN G. Global Dynamics of SIS Models with Transport-related[J]. Journal of Mathematical and Applications,2007(4):1460-1471

[3] XU R, MA Z E. Global Stability of a Delayed SIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate and Time Delay[J].Nonlinear Anal Realword Appl,2009, 10(5):3175-3189

[4] XU R, MA Z E. WANG Z P. Global Stability of a Delayed SIRS Epidemic Model with Saturation Incidence and Temporary Immunity[J].Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(9):3211-3221

[5] 常红果.几类具有非线性传染率的传染病模型的研究[D].陕西:陕西师范大学,2013

[6] 王佳颖,窦霁虹,童姗姗.具有非线性传染率的病毒动力学模型的稳定性分析[J].陕西科技大学学报,2011(5):136-137

[7] 李冰,王辉.一类在两个斑块内人口迁移的传染病模型的研究[J].北京工商大学学报:自然科学版,2009,27(1):56-60

[8] 李建.n 个斑块间具有路途感染的疾病传播模型[D].重庆:西南大学,2012

[9] 王倩倩,李宝麟.一类具有功能性反应的捕食者-食饵系统的定性分析[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2012

Local Stability Analysis on an SIS Epidemic Model in Patches Environment

YANG Wen-chuan

(College of Mathematics, Chongqing Normal University, Chongqing 400047 China)

Abstract:On the basis of bilinear transmission rates βSI and SIS epidemic model in regardless of population dispersal, this paper designs a more practical SIS epidemic model by improving and adding influential condition caused by population dispersal. Meeting certain conditions with reality on the existence of equilibrium, by the basic productive number R_0 and eigenvalue theory this paper find that if $R_0<1$, the disease-free equilibrium is local and asymptotically stable, while if $R_0>1$, the epidemic equilibrium is local and asymptotically stable. This model proposed enriches epidemic model types further.

Key words:SIS epidemic model; disease-free equilibrium; epidemic equilibrium; basic productive number