第 32 卷第 2 期 重庆工商大学学报(自然科学版) 2015 年 2 月
Vol. 32 NO.2 J Chongqing Technol Business Univ. (Nat Sci Ed) Feb.2015

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0002.005

关于一类图的邻点可区别全染色*

胡凤凤[1], 刘家保[2]

(1.安徽大学 数学科学学院,合肥 230601;2.安徽新华学院 公共课教学部,合肥 230088)

摘 要:图 G 的一个正常全染色 f 称为是邻点可区别的, 如果 G 中任何相邻点及其关联边的颜色集合不同;对一个图 G 进行邻点可区别的正常全染色所用最少颜色数称为 G 的邻点可区别全色数, 记为 $\chi_{at}(G)$;给出了一类特殊图类的邻点可区别全色数.

关键词:正常全染色;邻点可区别全染色;邻点可区别全色数

中图分类号:O157.5 **文献标识码**:A **文章编号**:1672-058X(2015)02-0023-04

具有重要实际意义和理论意义的图的染色问题,是图论的主要研究内容之一.随着图的染色问题在现实中被广泛应用,它逐渐成为众多学者研究的重要领域之一.起源于网络问题、生物学、信息科学、计算机科学的点可区别边染色或强边染色是一个十分困难的问题.在文献[1,2]中,点可区别边染色和邻点可区别边染色问题得到进一步研究.张忠辅教授在文献[3]中提出邻点可区别全染色的概念.新的染色问题不断被提出,与该问题相关的文献[3-9]中给出了邻点可区别染色、邻点可区别强全染色等染色的定义及其几类简单图关于此染色的色数,并提出了一些猜想.此处所考虑的图都是有限简单无向图,用 $V(G)$,$E(G)$分别表示图 G 的顶点集、边集,$\Delta(G)$表示图 G 的最大度,所用的未说明的图论术语与记号参见文献[9].

1 相关定义

定义 1[3] 设图 G 是阶至少为 2 的连通图,k 是正整数,f 是 $V(G)\cup E(G)$ 到 $\{1,2,\cdots,k\}$ 的映射, $\forall u,v\in V(G)$,记 $C(u)=\{f(u)\}\cup\{f(uv)\mid u,v\in V(G),uv\in E(G)\}$.

如果对 $\forall uv,vw\in E(G)$,$u\neq w$,有 $f(uv)\neq f(vw)$;对任意 $uv\in E(G)$,有 $f(u)\neq f(v)$,$f(u)\neq f(uv)$,$f(v)\neq f(uv)$,则称 f 为图 G 的 k-正常全染色;进一步,如果 f 还满足对任意 $uv\in E(G)$,有 $C(u)\neq C(v)$,则称 f 为图 G 的 k-邻点可区别全染色(简记为 k-AVDTC),称 $\min\{k\mid G$ 有 k-邻点可区别全染色$\}$ 为图 G 的邻点可区别全色数,记为 $\chi_{at}(G)$,其中 $C(u)$ 称为点 u 在 f 下的色集合.

定义 2[10] 设图 $T^h_{m,n}(h\geqslant 2,m,n\geqslant 1)$ 是由长为 h 的路连接一个 m 星图中心和一个 n 星图的中心所得到的图,其中:

$$V(T^h_{m,n})=\{v_1,v_2,\cdots,v_m\}\cup\{p_1,p_2,\cdots,p_{h-1},p_h,p_{h+1}\}\cup\{u_1,u_2\cdots,u_n\}$$

$$E(T^h_{m,n})=\{v_1p_1,v_2p_1,\cdots,v_mp_1\}\cup\{p_1p_2,p_2p_3,\cdots,p_{h-1}p_h,p_hp_{h+1}\}\cup$$

收稿日期:2014-07-18;**修回日期**:2014-09-18.

* **基金项目**:安徽省高等学校省级自然科学基金项目(KJ2010B105);安徽新华学院质量工程建设项目(2012tskcx04, 2012tskcx05).

作者简介:胡凤凤(1990-),女,安徽蚌埠人,硕士研究生,从事图论与组合网络研究.

$$\{u_1p_h,u_2p_h,\cdots,u_np_h,u_np_{h+1}\}$$

2 引 理

引理1 若 G 有两个相邻的最大度顶点,则

$$\chi_{at}(G)\geqslant\Delta(G)+2$$

证明 设 u,v 是 G 中相邻的两个最大度顶点,则对于 G 的任意一个 k-邻点可区别全染色 f 来说,$C(u)$ 和 $C(v)$ 均有 $\Delta(G)+1$ 种颜色,而 $C(u)\neq C(v)$,因此要使 G 有 k-邻点可区别全染色,必有 $k\geqslant\Delta(G)+2$,故结论成立.

引理2[4] 设 P_n 是 n 阶的路,$n\geqslant2$,则

$$\chi_{at}(P_n)=\begin{cases}3,n=2,3\\4,n\geqslant4\end{cases}$$

引理3[4] 设 C_n 表示 n 阶圈,则

$$\chi_{at}(C_n)=\begin{cases}5,n=3\\4,n\geqslant4\end{cases}$$

引理4[4] 对于 $n+1$ 阶星 $S_n(n\geqslant3)$,有 $\chi_{at}(S_n)=n+1$.

3 主要结论及其证明

定理1 对于图 $T^h_{m,n}(h\geqslant2,m,n\geqslant1)$,当 $m=n$ 时,有

$$\chi_{at}=\begin{cases}m=n=1,\chi_{at}=4\\m=n\text{ 且 }h\text{ 是偶数},\chi_{at}=\Delta(T^h_{m,n})+1\\m=n\text{ 且 }h\text{ 是奇数},\chi_{at}=\Delta(T^h_{m,n})+1\end{cases}$$

当 $m\neq n$ 时,有

$$\chi_{at}=\Delta(T^h_{m,n})+1$$

证明 分两种情况来加以讨论说明.

情况Ⅰ 1) 当 $m=n=1,h=2$ 时,图 $T^h_{m,n}$ 就是一条4阶路,由引理2可知 $\chi_{aT}=4$.

2) 当 $m=n$ 且 h 是奇数时,定义一个从 $V(T^h_{m,n})\cup E(T^h_{m,n})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,\Delta(T^h_{m,n})+2\}$ 上的映射 f 如下:

$f(p_j)=1,j\equiv1(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h+1$; $f(p_j)=2,j\equiv0(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h+1$; $f(v_i)=i+1,i=1,2,\cdots,m$; $f(u_i)=i+1,i=1,2,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+2,j\equiv1(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1,j\equiv0(\bmod 2)j=1,2,\cdots,h$.

当 $m=n=3$ 时,有 $f(v_1p_1)=4,f(v_2p_1)=2,f(v_3p_1)=3$; $f(u_1p_{h+1})=4,f(u_2p_{h+1})=2,f(u_3p_{h+1})=3$.

当 $m=n\neq3$ 时,有 $f(v_ip_1)=m-i+1,i=1,2,\cdots,m$; $f(u_jp_{h+1})=n-j+1,j=1,2,\cdots,n$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+2$ 一正常全染色,又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$,都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+2$-AVDTC.

3) 当 $m=n$ 且 h 是偶数时,定义一个从 $V(T^h_{m,n})\cup E(T^h_{m,n})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,\Delta(T^h_{m,n})+1\}$ 上的映射 f 如下:

$f(p_j)=1,j\equiv1(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h+1$; $f(p_j)=2,j\equiv0(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h+1$; $f(v_i)=i+1,i=1,2,\cdots,m$; $f(u_1)=1f(u_i)=i+1,i=2,3,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1,j\equiv1(\bmod 2),j=1,2,\cdots,h$; $f(p_jp_{j+1})=$

$\Delta(T^h_{m,n})$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h$.

当 $m=n=3$ 时,有 $f(v_1p_1)=4$, $f(v_2p_1)=2$, $f(v_3p_1)=3$; $f(u_1p_{h+1})=4$, $f(u_2p_{h+1})=1$, $f(u_3p_{h+1})=3$.

当 $m=n\neq 3$ 时,有 $f(v_ip_1)=m-i+1$, $i=1,2,\cdots,m$, $f(u_np_h)=1$; $f(u_ip_{h+1})=n-i+1$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$ 一正常全染色,又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$ 都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$-AVDTC.

情况Ⅱ　1) 当 $m=1$, $n\neq 1$(或 $m\neq 1$, $n=1$)时,定义一个从 $V(T^h_{m,n})\cup E(T^h_{m,n})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,\Delta(T^h_{m,n})+1\}$ 的映射 f 如下:

子情况 A 当 h 为奇数时,有 $f(v_1)=2$, $f(v_1p_1)=3$; $f(p_j)=1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(p_j)=2$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(u_i)=i+1$, $i=1,2,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h-1$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h-1$.

当 $n=3$ 时,有 $f(u_1p_h)=4$, $f(u_2p_h)=2$, $f(u_3p_h)=3$.

当 $n\neq 3$ 时,有 $f(u_jp_h)=n-j+1$, $j=1,2,\cdots,n$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$ 一正常全染色.又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$ 都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$-AVDTC.

子情况 B 当 h 为偶数时,有 $f(v_1)=2$, $f(v_1p_1)=3$; $f(p_j)=1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$; $f(p_j)=2$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h$; $f(u_1)=1$, $f(u_i)=i+1$, $i=2,3,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h-1$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h-1$.

当 $n=3$ 时,有 $f(u_1p_h)=4$, $f(u_2p_h)=1$, $f(u_3p_h)=3$.

当 $n\neq 3$ 时,有 $f(u_np_h)=1$; $f(u_ip_h)=n-i+1$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$ 一正常全染色,又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$ 都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$-AVDTC.

4) 当 $m\neq n$ 且 $m,n\neq 1$ 时,设 $m<n$,定义一个从 $V(T^h_{m,n})\cup E(T^h_{m,n})$ 到 $\{0,1,2,\cdots,\Delta(T^h_{m,n})+1\}$ 的映射 f 如下:

子情况 C 当 h 为奇数时,有 $f(p_j)=1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(p_j)=2$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(v_i)=i+1$, 关 $i=1,2,\cdots,m$, $f(u_i)=i+1$, $i=1,2,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})$, $j\equiv 0(\bmod 2)j=1,2,\cdots,h$.

当 $m=3$ 时,有 $f(v_1p_1)=4$, $f(v_2p_1)=2$, $f(v_3p_1)=3$.

当 $n=3$ 时,有 $f(u_1p_{h+1})=4$, $f(u_2p_{h+1})=2$, $f(u_3p_{h+1})=3$.

当 $m,n\neq 3$ 时,有 $f(v_ip_1)=m-i+1$, $i=1,2,\cdots,m$; $f(u_jp_{h+1})=n-j+1$, $j=1,2,\cdots,n$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$ 一正常全染色,又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$ 都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$-AVDTC.

子情况 D 当 h 为偶数时,有 $f(p_j)=1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(p_j)=2$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h+1$; $f(v_i)=i+1$, $i=1,2,\cdots,m$, $f(u_i)=i+1$, $i=1,2,\cdots,n$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})+1$, $j\equiv 1(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h$; $f(p_jp_{j+1})=\Delta(T^h_{m,n})$, $j\equiv 0(\bmod 2)$, $j=1,2,\cdots,h$.

当 $m=3$ 时,有 $f(v_1p_1)=4$, $f(v_2p_1)=2$, $f(v_3p_1)=3$.

当 $n=3$ 时,有 $f(u_1p_{h+1})=4$, $f(u_2p_{h+1})=1$, $(u_3p_{h+1})=3$.

当 $m=n\neq 3$ 时,有 $f(v_ip_1)=m-i+1$, $i=1,2,\cdots,m$; $f(u_np_{h+1})=1$, $f(u_ip_{h+1})=n-i+1$, $i=1,2,\cdots,n-1$.

显然 f 是 $T^h_{m,n}$ 的 $\Delta(T^h_{m,n})+1$ 一正常全染色,又因为 $\forall uv\in E(T^h_{m,n})$ 都有 $C(u)\neq C(v)$,所以 f 是 $T^h_{m,n}$ 的

$\Delta(T^{h}_{m,n})+1-$AVDTC.

综上所述,当 $m\neq n$ 且 $m,n\neq 1$ 时,f 是 $T^{h}_{m,n}$的 $\Delta(T^{h}_{m,n})+1-$AVDTC.

参考文献:

[1] BALISTER P N,BOLLOB B,SHELP R H.Vertex Distinguishing Coloring of Graphs with Δ(G)= 2[J].Discrete Mathematics,2002(252):17-29

[2] ZHANG Z F,LIU L ZH, WANG J F.Asjacent Strong Edge Coloring of Graphs[J].Applied Mathematics Letters,2002(15):623-626

[3] ZHANG Z F.On the Adjacent Vertex Distinguish Total Coloring of Graphs[J].Science in China Ser A,2004(10):574-583

[4] 刘家保, 王林, 陆一南. 双圈图 $G(n,m)$的奇优美标号及其算法[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2012,35(5):708-710

[5] 刘家保, 王林, 陆一南. 具有公共边的双圈图的奇优美标号及其算法 [J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2012,35(6):857-859

[6] 张忠辅, 李敬文, 陈祥恩.图的距离不超过β的点可区别全染色[J].中国科学 A 辑:数学,2006,36(10):1119-1130

[7] 刘家保, 邹婷, 陆一南. 关于笛卡尔乘积图的优美性[J]. 纯粹数学与应用数学,2012,28(3):329-332

[8] 严谦泰.关于图的一般邻点可区别全染色[J].系统科学与数学,2010(1):101-106

[9] BONDY J A,MURTY U S R.Graph Theory with Applications[M]. New York: American Elsevier,1976

[10] 刘家保,吕宁宁,余国锋.关于一类树的优美标号[J].河北北方学院学报:自然科学版,2010,26(5):1-4

On Adjacent Vertex Distinguishing Total Coloring for a Class of Graphs

HU Feng-feng[1] , LIU Jia-bao[2]

(1. School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China;

2. Teaching Department for Common Courses, Anhui Xinhua University, Hefei 230088, China)

Abstract: A normal total coloring f of graph G is adjacent vertex distinguishing. If any point of an adjacent vertex in G and the color set of its related edges are different, the smallest number of colors used in the normal adjacent vertex distinguishing total coloring for a Graph G is called the number of adjacent vertex distinguishing total coloring and is denoted as Xat (G). This paper gives a class of special adjacent vertex distinguishing total coloring number of graphs.

Key words: normal total coloring; adjacent vertex distinguishing total coloring; adjacent vertex distinguishing total coloring number

责任编辑:李翠薇