doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0002.004

关于平衡问题的逼近方法及强收敛性*

罗光耀[1], 龚黔芬[2]
(1.重庆工商大学 数学与统计学院, 重庆 400067; 2.重庆工商大学 计算机与信息工程学院, 重庆 400067)

摘　要:在 Hilbert 空间中, 建立了一个逼近平衡问题数值解的广义迭代方法, 并在一定条件下证明了该方法所产生的序列强收敛到平衡问题的解, 该强收敛解同时为一类变分不等式问题的解.

关键词:平衡问题;不动点方法;强正算子;变分不等式

中图分类号:O177.91　　**文献标识码**:A　　**文章编号**:1672-058X(2015)02-0017-06

0　引　言

设 H 为一实 Hilbert 空间,其内积和范数分别表示为$\langle \cdot , \cdot \rangle$和$\| \cdot \|$,$K$ 为 H 的一个非空闭凸子集.设 F:$K\times K\rightarrow \mathbf{R}$ 为一双变元函数,$\mathbf{R}$ 为实数集.考虑如下的平衡问题:求一点 $x\in K$,使得

$$F(x,y) \geqslant 0, \forall y \in K \tag{1}$$

以 $EP(F)$ 表示平衡问题(1)的解集.如果 $F(x,y)=\langle Tx,y-x\rangle$, $\forall x,y\in K$,则 $x^* \in EP(F)$ 的充分必要条件是$\langle Tx^*,y-x^*\rangle\geqslant 0$, $\forall y\in K$,即 x^* 是变分不等式问题的一个解.

称 F:$K\rightarrow K$ 为压缩映象,如果存在常数 $\rho\in(0,1)$,使得 $\|f(x)-f(y)\|\leqslant \rho\|x-y\|$, $\forall x,y\in K$.

称 T:$K\rightarrow K$ 为非扩张映象,如果 $\|Tx-Ty\|\leqslant \|x-y\|$, $\forall x,y \in K$.此处以 $Fix(T)$ 表示 T 的不动点集合,即 $Fix(T)=\{x\in K,Tx=x\}$.

非线性算子的不动点理论是现代非线性分析的重要组成部分,广泛应用于经济决策、最优化理论、算子理论、数值分析和动力系统等经济和工程技术领域.近年来,利用非扩张映象的不动点方法解决变分不等式和平衡问题引起了数学研究者的极大兴趣,并获得了一系列很好的研究成果[1-16].2006 年,Marino-Xu[11] 介绍了一个逼近非扩张映象不动点的广义迭代方法:

$$x_{n+1} = \alpha_n\gamma f(x_n) + (I-\alpha_n A)Tx_n \tag{2}$$

其中 I 为单位算子,A 为强正有界线性算子.在一定条件下证明了迭代序列强收敛到非扩张映象的不动点,并且该不动点为变分不等式问题 $\langle(A-\gamma f)x,x-z\rangle\leqslant 0$, $\forall z\in Fix(T)$ 的唯一解,这恰好是非扩张映象不动点集上二次泛函 $\min_{x\in F(T)}\frac{1}{2}[Ax,x]-[x,b]$的最优化条件.

2011 年,Zegeye-Shahzad[12] 为了研究伪压缩映象和单调映象的公共不动点定理,引入了 T_{r_n} 和 F_{r_n} 映象的定义,建立了迭代逼近方法(式(3)):

$$x_{n+1} = \alpha_n\gamma f(x_n) + \alpha_n T_{r_n}F_{r_n}x_n \tag{3}$$

并在一定条件下证明了逼近伪压缩映象和单调映象公共不动点的强收敛定理.

在此基础上,将逼近非扩张映象不动点的迭代方法式(2)和式(3)进行推广,定义一个逼近平衡问题解

收稿日期:2014-05-25;**修回日期**:2014-06-17.

* **基金项目**:重庆市自然科学基金(CSTC 2012jjA00039);重庆市教委科技研究项目(KJ130731).

作者简介:罗光耀(1956-),男,重庆人,讲师,从事基础数学研究.

的一个改进的广义迭代方法:

$$\begin{cases} F(u_n,y) + \dfrac{1}{r_n} < y - u_n, u_n - x_n > \geqslant 0, \forall y \in K \\ x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) u_n \end{cases} \tag{4}$$

其中 $\alpha_n \in (0,1)$,A 为一强正有界线性算子.此处的目的是在 Hilbert 空间中利用不动点方法建立逼近平衡问题解的强收敛定理,所得的结果改进并推广了文献[8,11,12]中相应的结论.

1 预备知识

设 H 为一实 Hilbert 空间,其内积和范数分别表示为$[\cdot,\cdot]$和$\|\cdot\|$,K 为 H 的一个非空闭凸子集,以“→”表示 K 中序列的强收敛.称算子 A 为强正,如果存在常数 $\overline{\gamma}>0$,使得

$$< Ax,x > \geqslant \overline{\gamma}\|x\|^2, \forall x \in H$$

为了研究涉及双变元函数 $F:K\times K\to \mathbf{R}$ 的平衡问题(1),假设 F 满足下列条件:(A_1) $\forall x\in K, F(x,x)=0$;(A_2) F 是单调的,即 $F(x,y)+F(y,x)\leqslant 0, \forall x,y\in K$;($A_3$) $\lim\limits_{t\to 0} F(tz+(1-t)x,y)\leqslant F(x,y), \forall x,y\in K$;($A_4$) $\forall x\in K, y\to F$ 是凸且下半连续的.

引理 1[6] 设 K 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集,$T:K\to K$ 为非扩张映象且 $Fix(T)\neq\varnothing$,如果 K 中的序列 x_n 弱收敛于 x 且 $x_n-Tx_n\to y$,则 $x-Tx=y$.

引理 2[11] 设 A 为 Hilbert 空间 H 中的强正有界线性算子,如果系数 $\overline{\gamma}>0$ 且 $0<\rho\leqslant\|A\|^{-1}$,则 $\|I-\rho A\|\leqslant 1-\overline{\rho\gamma}$.

引理 3[11] 在 Hilbert 空间 H 中,下列不等式(i)(ii)成立:

(i) $\|x+y\|^2=\|x\|^2+2[x,y]+\|y\|^2\leqslant\|x\|^2+2<y,(x+y)>, \forall x,y\in H$;

(ii) $\|tx+(1-t)y\|^2=t\|x\|^2+(1-t)\|y\|^2-t(1-t)\|x-y\|^2, \forall t\in[0,1], \forall x,y\in H$.

引理 4[7,13] 设 K 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集,$F:K\times K\to\mathbf{R}$ 满足条件(A_1)-(A_4),则 $\forall r>0, x\in H$,$\exists z\in K$,满足

$$F(z,y) + \frac{1}{r} < y - z, z - x > \geqslant 0, \forall y \in K$$

记 $F_r:=\{z\in K: F(z,y)+\frac{1}{r}<y-z,z-x>\leqslant 0, \forall y\in K\}$,则下列结论成立:

1) F_r 是单值映象;

2) F_r 是严格非扩张映象,即$\|F_rx-F_ry\|^2\leqslant[F_rx-F_ry,x-y], \forall x,y\in H$;

3) $EP(F)=Fix(F_r)$是闭凸集.

引理 5[15] 设$\{\alpha_n\}\{\gamma_n\}\{\delta_n\}$为 3 个非负实数列,并且$\{\gamma_n\}\in(0,1)$,如果满足不等式

$$\alpha_{n+1}\leqslant(1-\gamma_n)\alpha_n+\gamma_n\delta_n, n\geqslant 0$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n=\infty$,$\limsup\limits_{n\to\infty}\delta_n\leqslant 0$(或$\sum_{n=1}^{\infty}|\gamma_n\delta_n|<\infty$),则$\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0$.

2 主要结果

定理 1 设 K 为 Hilbert 空间 H 的非空闭凸子集,$F:K\times K\to\mathbf{R}$ 是满足条件(A_1)-(A_4)的双变元函数且 $EP(F)\neq\varnothing$.如果 $F:K\times K$ 是系数为 $\rho\in(0,1)$ 的压缩映象,A 是系数为 $\overline{\gamma}$ 的强正有界线性算子且 $0<\gamma<\dfrac{\overline{\gamma}}{\rho}$.对给定 $x_0\in K, \alpha_n\in(0,1)$,并满足下列条件:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0, \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=\infty, \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n-\alpha_{n-1}|<\infty$;

(ii) $\liminf\limits_{n\to\infty} r_n > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} |r_n - r_{n-1}| < \infty$.

则由式(4)定义的迭代序列$\{x_n\}$强收敛到 T 和 F 的某个公共元 $q \in EP(F)$,且

$$< (A - \gamma f)q, q - \omega > \leqslant 0, \forall \omega \in EP(F)$$

证明　首先,证明序列$\{x_n\}$有界.记 $u_n = F_{r_n} x_n$ 且

$$F_{r_n} x := \left\{ z \in K : F(z, y) + \frac{1}{r_n} < y - z, z - x > \geqslant 0, \forall y \in K \right\} \tag{5}$$

则式(4)可简记为(注:文献[12]中定义的 $u_n = F_{r_n}$ 是式(5)定义的特例)

$$x_{n+1} = \alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) F_{r_n} x_n \tag{6}$$

取 $p \in EP(F)$,由引理 4 可知 $p \in Fix(F_{r_n})$ 且

$$\|u_n - p\| = \|F_{r_n} x_n - p\| \leqslant \|x_n - p\| \tag{7}$$

由式(6)和引理 2 得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - p\| = &\|\alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) F_{r_n} x_n - p\| \leqslant \\ &\alpha_n \|\gamma f(x_n) - Ap\| + \|(I - \alpha_n A)(u_n - p)\| \leqslant \\ &\alpha_n \gamma \|f(x_n) - p\| + \alpha_n \|\gamma f(p) - Ap\| + (1 - \alpha_n \bar{\gamma}) \|u_n - p\| \leqslant \\ &\alpha_n \gamma \rho \|x_n - p\| + \alpha_n \|\gamma f(p) - Ap\| + (1 - \alpha_n \bar{\gamma}) \|x_n - p\| \leqslant \\ &(1 - (\bar{\gamma} - \gamma\rho)\alpha_n) \|x_n - p\| + \alpha_n \|\gamma f(p) - Ap\| \leqslant \\ &\max\left\{ \|x_n - p\|, \frac{1}{\bar{\gamma} - \gamma\rho} \|\gamma f(p) - Ap\| \right\} \end{aligned}$$

类似地,递推可得

$$\|x_n - p\| \leqslant \max\left\{ \|x_0 - p\|, \frac{1}{\bar{\gamma} - \gamma\rho} \|\gamma f(p) - Ap\| \right\}, n \geqslant 0 \tag{8}$$

因此$\{x_n\}$有界,进一步可得$\{u_n\}$ $\{Au_n\}$ $\{f(x_n)\}$有界.

其次,证明$\lim\limits_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0$.由式(6)得

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| = &\|\alpha_n \gamma f(x_n) + (I - \alpha_n A) u_n - [\alpha_{n-1} \gamma f(x_{n-1}) + (I - \alpha_{n-1} A) u_{n-1}]\| = \\ &\|\alpha_n \gamma f(x_n) - \alpha_n \gamma f(x_{n-1}) + \alpha_n \gamma f(x_{n-1}) - \alpha_{n-1} \gamma f(x_{n-1}) + \\ &(I - \alpha_n A) u_n - (I - \alpha_n A) u_{n-1} + (I - \alpha_n A) u_{n-1} - (I - \alpha_{n-1} A) u_{n-1}\| \leqslant \\ &\alpha_n \gamma \|f(x_n) - f(x_{n-1})\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \|\gamma f(x_{n-1})\| + \\ &(1 - \alpha_n \bar{\gamma}) \|u_n - u_{n-1}\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| \|Au_{n-1}\| \leqslant \\ &\alpha_n \gamma \rho \|x_n - x_{n-1}\| + (1 - \alpha_n \bar{\gamma}) \|u_n - u_{n-1}\| + \|\alpha_n - \alpha_{n-1}\| M_1 \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $M_1 = \sup\{\gamma \|f(x_n)\| + \|Au_n\|\}$.又因为 $u_n = F_{r_n} x_n \in K$ 和式(5)得

$$F(u_n, y) + \frac{1}{r_n} < y - u_n, u_n - x_n > \geqslant 0 \tag{10}$$

$$F(u_{n-1}, y) + \frac{1}{r_{n-1}} < y - u_{n-1}, u_{n-1} - x_{n-1} > \geqslant 0 \tag{11}$$

在式(10)和式(11)中分别取 $y = u_{n-1}$, $y = u_n$,则

$$F(u_n, u_{n-1}) + \frac{1}{r_n} < u_{n-1} - u_n, u_n - x_n > \geqslant 0 \tag{12}$$

$$F(u_{n-1}, u_n) + \frac{1}{r_{n-1}} < u_n - u_{n-1}, u_{n-1} - x_{n-1} > \geqslant 0 \tag{13}$$

将式(12)和式(13)相加,并利用(A_2)得

$$\left\langle u_n - u_{n-1}, \frac{u_{n-1} - x_{n-1}}{r_{n-1}} - \frac{u_n - x_n}{r_n} \right\rangle \geqslant 0 \tag{14}$$

式(14)等价于

$$< u_n - u_{n-1}, u_{n-1} - u_n + u_n - x_{n-1} - \frac{r_{n-1}}{r_n}(u_n - x_n) > \geqslant 0$$

即

$$\|u_n - u_{n-1}\|^2 \leqslant \langle u_n - u_{n-1}, x_n - x_{n-1} + (1 - \frac{r_{n-1}}{r_n})(u_n - x_n) \rangle \leqslant$$
$$\|u_n - u_{n-1}\| [\|x_n - x_{n-1}\| + \left|\frac{r_n - r_{n-1}}{r_n}\right| \|u_n - x_n\|]$$

由定理 1 条件(ii),不妨设 $r_n \geqslant \varepsilon > 0$,则

$$\|u_n - u_{n-1}\| \leqslant \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{1}{\varepsilon}|r_n - r_{n-1}| \|u_n - x_n\| \tag{15}$$

结合式(6)(9)和式(15)得

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leqslant \alpha_n \gamma\rho \|x_n - x_{n-1}\| + (1 - \alpha_n \bar{\gamma})[\|x_n - x_{n-1}\| + \frac{1}{\varepsilon}|r_n - r_{n-1}| \|u_n - x_n\|] + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| M_1 \leqslant$$
$$[1 - (\bar{\gamma} - \gamma\rho)\alpha_n] \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{1}{\varepsilon}|r_n - r_{n-1}| \|u_n - x_n\| + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| M_1 \leqslant$$
$$[1 - (\bar{\gamma} - \gamma\rho)\alpha_n] \|x_n - x_{n-1}\| + \frac{1}{\varepsilon}|r_n - r_{n-1}| M_2 + |\alpha_n - \alpha_{n-1}| M_1 \tag{16}$$

其中 $M_2 = \sup\{\|u_n = x_n\|\}$.由条件(i)-(ii)和引理 5,得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0 \tag{17}$$

进一步,结合式(15)和(17)得

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - u_{n-1}\| = 0 \tag{18}$$

另一方面,由式(6)有 $x_n = \alpha_{n-1}\gamma f(x_{n-1}) + (I - \alpha_{n-1}A)u_{n-1}$,则

$$\|x_n - u_n\| \leqslant \|x_n - u_{n-1}\| + \|u_{n-1} - u_n\| \leqslant$$
$$\alpha_{n-1} \|\gamma f(x_{n-1}) - Au_{n-1}\| + \|u_{n-1} - u_n\|$$

结合定理 1 条件(i)和式(18)得

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - u_n\| = 0 \tag{19}$$

设$\{x_{n_i}\}$为$\{x_n\}$的一子列,由于$\{x_{n_i}\}$有界,故存在一个弱收敛的子列$\{x_{n_i}\}$,为了不失一般性,不妨设$\{x_{n_i}\}$弱收敛于 ω.

因为 K 是闭凸集,所以 K 也是弱闭的,因此,$\omega \in K$.类似地,如果$\{u_{n_i}\}$为$\{u_n\}$的一个弱收敛子列,则由式(19)可知$\{u_{n_i}\}$弱收敛于 ω.由式(5)和(10)得

$$F(u_{n_i}, y) + \frac{1}{r_{n_i}} < y - u_{n_i}, u_{n_i} - x_{n_i} > \geqslant 0, \forall y \in K \tag{20}$$

结合条件(A_2)和式(20)得

$$\frac{1}{r_{n_i}} < y - u_{n_i}, u_{n_i} - x_{n_i} > \geqslant F(y, u_{n_i}) \tag{21}$$

由式(19)可知 $u_{n_i} - x_{n_i} \to 0$,且 u_{n_i}弱收敛于 ω,则由式(21)得

$$F(y, \omega) \leqslant 0, \forall y \in K \tag{22}$$

记 $z_t = ty + (1-t)\omega$, $\forall t \in (0,1]$, $y \in K$,则 $z_t \in K$,进一步得 $F(z_t, \omega) \leqslant 0$.同时,由条件($A_1$)和($A_4$)得

$$0 = F(z_t, z_t) \leqslant tF(z_t, y) + (1 - t)F(z_t, \omega) \leqslant tF(z_t, y)$$

因此,$F(z_t, y) \geqslant 0$.由条件(A_3)得 $F(\omega, y) \geqslant 0$, $\forall y \in K$,即 x_{n_i}弱收敛于 $\omega \in EP(F)$.

现在,证明$\limsup_{n\to\infty} < (A - \gamma f)q, q - x_n > \leqslant 0$,其中 $q = \lim_{t\to 0} x_t$.定义映象 $\Phi_n x = t\gamma f(x) + (I - tA)F_{r_n}x$, $\forall t \in (0,1)$, $\forall x, y \in H$,有

$$\|\Phi_n x - \Phi_n y\| \leqslant t\gamma \|f(x) - f(y)\| + (1 - t\bar{\gamma}) \|F_{r_n}x - F_{r_n}y\| \leqslant$$

$$t\gamma\rho\|x-y\|+(1-t\bar{\gamma})\|x-y\|=$$
$$|1-(\bar{\gamma}-\gamma\rho)t|\|x-y\|$$

由于 $0<1-(\bar{\gamma}-\gamma\rho)t<1$,则 Φ_n 是压缩映象,故存在唯一的不动点 x_t,即

$$x_t=t\gamma f(x_t)+(I-tA)F_{r_n}x_t \tag{23}$$

由引理 3 和 4,及式(19)和式(23)得

$$\begin{aligned}\|x_t-x_n\|^2=&\|t[\gamma f(x_t)-Ax_n]+(I-tA)(F_{r_n}x_t-x_n)\|^2\leqslant\\&(1-\bar{\gamma}t)^2\|F_{r_n}x_t-x_n\|^2+2t[\gamma f(x_t)-Ax_n,x_t-x_n]=\\&(1-\bar{\gamma}t)^2\|F_{r_n}x_t-F_{r_n}x_n+F_{r_n}x_n-x_n\|^2+2t<\gamma f(x_t)-Ax_n,x_t-x_n>\leqslant\\&(1-\bar{\gamma}t)^2(\|x_t-x_n\|+\|u_n-x_n\|)^2+2t<\gamma f(x_t)-Ax_n,x_t-x_n>\leqslant\\&(1-\bar{\gamma}t)^2\|x_t-x_n\|^2+\psi_n(t)+2t<\gamma f(x_t)-Ax_t,x_t-x_n>+2t<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>\end{aligned} \tag{24}$$

其中 $\psi_n(t)=(1-\bar{\gamma}t)^2(2\|x_t-x_n\|+\|u_n-x_n\|)\|u_n-x_n\|\to0(n\to\infty)$.因为 A 是强正算子,则

$$<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>=<A(x_t-x_n),x_t-x_n>\geqslant\bar{\gamma}\|x_t-x_n\|^2 \tag{25}$$

结合式(24)和式(25)得

$$\begin{aligned}2t<Ax_t-\gamma f(x_t),x_t-x_n>\leqslant&(\bar{\gamma}^2t^2-2\bar{\gamma}t)\|x_t-x_n\|^2+\psi_n(t)+2t<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>\leqslant\\&(\bar{\gamma}^2t^2-2t)<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>+\psi_n(t)+2t<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>=\\&\bar{\gamma}^2t^2<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>+\psi_n(t)\end{aligned}$$

整理得

$$<Ax_t-\gamma f(x_t),x_t-x_n>\leqslant\frac{\bar{\gamma}t}{2}<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>+\frac{1}{2t}\psi_n(t) \tag{26}$$

对式(26)关于 $n\to\infty$ 取极限,并由 $\psi_n(t)\to0(n\to\infty)$得

$$\limsup_{n\to\infty}<Ax_t-\gamma f(x_t),x_t-x_n>\leqslant\frac{t}{2}M_3 \tag{27}$$

其中常数 $M_3\geqslant\bar{\gamma}<Ax_t-Ax_n,x_t-x_n>$.由式(27)进一步得

$$\limsup_{t\to0}\limsup_{n\to\infty}[Ax_t-\gamma f(x_t),x_t-x_n]\leqslant0 \tag{28}$$

另一方面,由于

$$\begin{aligned}&<\gamma f(q)-Aq,x_n-q>=<\gamma f(q)-Aq,x_n-q>-<\gamma f(q)-Aq,x_n-x_t>+<\gamma f(q)-Aq,x_n-x_t>-\\&<\gamma f(q)-Ax_t,x_n-x_t>+<\gamma f(q)-Ax_t,x_n-x_t>-<\gamma f(x_t)-Ax_t,x_n-x_t>+<\gamma f(x_t)-Ax_t,x_n-x_t>\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}<\gamma f(q)-Aq,x_n-q>\leqslant&\|\gamma f(q)-Aq\|\|x_t-q\|+\|A\|\|x_t-q\|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_t\|+\\&\gamma\rho\|x_t-q\|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_t\|+\limsup_{n\to\infty}<\gamma f(x_t)-Ax_t,x_n-x_t>\end{aligned}$$

因此,由式(28)和$\lim\limits_{t\to0}x_t=q$ 得

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}<\gamma f(q)-Aq,x_n-q>=&\limsup_{t\to0}\limsup_{n\to\infty}<\gamma f(q)-Aq,x_n-q>\leqslant\\&\limsup_{t\to0}\|\gamma f(q)-Aq\|\|x_t-q\|+\limsup_{t\to0}\|A\|\|x_t-q\|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_t\|+\\&\limsup_{t\to0}\gamma\rho\|x_t-q\|\lim_{n\to\infty}\|x_n-x_t\|+\\&\limsup_{t\to0}\limsup_{n\to\infty}<\gamma f(x_t)-Ax_t,x_n-x_t>\leqslant0\end{aligned} \tag{29}$$

最后,证明强收敛到 $q\in EP(F)$.由式(6)(7)和引理 2 得

$$\begin{aligned}\|x_{n+1}-q\|^2=&\alpha_n<\gamma f(x_n)-Aq,x_{n+1}-q>+<(I-\alpha_nA)(u_n-q),x_{n+1}-q>\leqslant\\&\alpha_n\gamma<f(x_n)-Af(q),x_{n+1}-q>+\alpha_n<\gamma f(q)-Aq,x_{n+1}-q>+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|u_n-q\|\|u_{n+1}-q\|\leqslant\\&\alpha_n\gamma\rho\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|+\alpha_n<\gamma f(q)-Aq,x_{n+1}-q>+(1-\alpha_n\bar{\gamma})\|x_n-q\|\|x_{n+1}-q\|\leqslant\end{aligned}$$

$$\frac{1-(\bar{\gamma}-\gamma\rho)\alpha_n}{2}(\|x_n-q\|^2+\|x_{n+1}-q\|^2)+\alpha_n<\gamma f(q)-Aq,x_{n+1}-q>\leqslant$$

$$\frac{1-(\bar{\gamma}-\gamma\rho)\alpha_n}{2}\|x_n-q\|^2+\frac{1}{2}\|x_{n+1}-q\|^2+\alpha_n<\gamma f(q)-Aq,x_{n+1}-q>$$

整理得

$$\|x_{n+1}-q\|^2\leqslant[1-(\bar{\gamma}-\gamma\rho)\alpha_n]\|x_n-q\|^2+2\alpha_n<\gamma f(q)-Aq,x_{n+1}-q> \tag{30}$$

结合式(29)(30)和引理 5 得 $\lim_{n\to\infty}\|x_n-q\|=0$.

参考文献:

[1] 闻道君,邓磊.有限簇非扩张映象的不动点定理及逼近算法[J].数学物理学报,2012,32A(3):540-546

[2] 龚黔芬,闻道君.非凸变分不等式和 Wiener-Hopf 方程的逼近方法[J].西南师范大学学报:自然科学版,2012,37(2):34-37

[3] 龚黔芬,闻道君,唐艳.关于渐近伪压缩映象不动点的粘滞-投影方法[J].四川师范大学学报:自然科学版,2014,37(2):183-187

[4] 龚黔芬,闻道君.连续伪压缩映象不动点的广义逼近方法[J].西南师范大学学报:自然科学版,2014,39(2):22-26

[5] ANH P N.Strong Convergence Theorems for Nonexpansive Mappings and Ky Fan Inequalities[J].J Optim Theory Appl,2012(154):303-320

[6] GOEBEL K,KIRK W A.Topics in Metric Fixed Point Theory[C]//Cambridge Studies in Advanced Math.Cambridge:Cambridge University Press,1990

[7] BLUM E,OETTLI W.From Optimization and Variational Inequalities to Equilibrium Problems[J].Math Stud,1994(63):123-145

[8] XU H K.Viscosity Approximation Methods for Nonexpansive Mappings[J].J Math Anal Appl,2004(298):279-291

[9] 龚黔芬. $ K $ -严格伪压缩映象簇公共不动点的强收敛定理[J].重庆工商大学学报:自然科学版,2014,31(2):8-15

[10] 闻道君,宋树枝,龙宪军.非凸变分不等式和非扩张映象的 Wiener-Hopf 方法[J].云南大学学报:自然科学版,2012,34(1):5-8

[11] MARINO G,XU H K.A General Iterative Method for Nonexpansive Mappings in Hilbert Spaces[J].J Math Anal Appl,2006(318):43-52

[12] ZEGEYE H,SHAHZAD N.Strong Convergence of an Iterative Method for Pseudo-contractive and Monotone Mappings[J].J Glob Optim,2012(54):173-184.

[13] COMBETTES P L,HIRSTOAGA A.Equilibrium Programming in Hilbert spaces[J].J Nonlinear Convex Anal,2005(6):117-136

[14] 闻道君,万波.一类新的广义非凸变分不等式问题的近似解[J].云南大学学报:自然科学版,2014,36(1):1-5

[15] XU H K.An Iterative Approach to Quadratic Optimization[J].J Optim Theory Appl,2003(116):659-678

[16] 闻道君,陈义安.广义非凸变分不等式解的存在性与投影算法[J].数学杂志,2012,32(3):475-480

Approximate Methods and Strong Convergence on Equilibrium Problems

LUO Guang-yao[1], GONG Qian-fen[2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China; 2. School of Computer Science and Information Engineering, Chongqing Technology and Business University, Chongqing 400067, China)

Abstract: In Hilbert space, a general iterative method of a numerical solution to approximate equilibrium problems is set up. The solution to the problems from strong convergence of the sequence to equilibrium generated by this method is proved under certain condition, and this solution to strong convergence is simultaneously the solution to a class of variational inequalities.

Key words: equilibrium problem; fixed point method; strong positive operator; variational inequality

责任编辑:李翠薇