

doi:10.16055/j.issn.1672-058X.2015.0002.003

时滞 Lorenz-like 系统的 Hopf 分岔研究*

王志强, 王书玲, 吴然超**

(安徽大学 数学科学学院, 合肥 230601)

摘要:随动力系统学的发展,平衡点的稳定性以及 Hopf 分岔对于动力系统学研究愈显重要。首先研究时滞 Lorenz-like 系统存在平衡点的条件,在此条件下,通过分析系统在平衡点处的线性化系统特征根的分布情况,得出系统在平衡点处的稳定性;随着系统时滞参数的变化,时滞系统在平衡点处稳定性相应地会发生改变;以时滞为分岔参数,研究了时滞系统存在 Hopf 分岔的条件;最后利用 Matlab 程序进行仿真,验证了理论分析的正确性。

关键词:Lorenz-like 时滞系统;稳定性;极限环;Hopf 分岔

中图分类号:O175 **文献标识码:**A **文章编号:**1672-058X(2015)02-0011-06

0 引言

稳定性与分岔问题是动力系统研究中的重要课题之一,国内外已较好地掌握了相关的数学分析工具^[1],在稳定性与分岔的理论研究和工程应用方面取得长足的进展^[2]。动力系统的分岔是指,在系统参数发生连续变化的情况下,如果系统相轨迹的拓扑结构发生了改变,称这种变化为分岔。考虑含参数的动力系统

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad x \in U \subseteq R^n, \mu \in J \subseteq R^m \quad (1)$$

其中 μ 是实分岔参数, f 是关于 x 和 μ 的函数。当参数 μ 连续变动时,如果上述系统的拓扑结构在 $\mu_0 \in J$ 处发生突然变化,称该系统在 $\mu = \mu_0$ 处出现分岔, μ_0 称为系统的一个分岔值,分岔值组成的集合称为分岔集。Hopf 分岔是较为常见、应用较广泛的一种分岔类型^[3],它是指当分岔参数变化且经过分岔值时,从平衡状态产生孤立的周期运动的现象。从相图上看,这时有极限环从平衡点“冒”出来。

自从 1963 年气象学家 Lorenz 提出经典的 Lorenz 系统^[4]以来,大量的混沌系统相继被提出,例如 Chen 系统^[5], Liu 系统^[6], T 系统^[7]等。近年来,对这些系统分岔问题的研究已成为热点之一,其中关于 Hopf 分岔问题的研究有很好的结果,相关研究也被应用到物理学、生物学、化学等众多学科领域。在文献[8]中,提出了一个新的 Lorenz 类系统,并研究了它的分岔规律,系统的动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx - xz \\ \dot{z} = -cz + dx^2 \end{cases} \quad (2)$$

收稿日期:2014-08-29;修回日期:2014-09-01.

* 基金项目:高等学校博士学科点专项基金(20093401120001);安徽省自然科学基金(11040606M12);安徽大学“211 项目”(KJJQ1102)资助项目.

作者简介:王志强(1993-),男,安徽安庆人,从事微分方程与动力系统研究.

** 通讯作者:吴然超(1971-),男,安徽六安人,教授,博士,从事微分方程与动力系统研究. Email:rcwu@ahu.edu.cn.

其中 x, y, z 为状态变量, a, b, c, d 为系统参数。系统含有 6 项, 其中有 4 个线性项, 与较其它的混沌或超混沌系统相比, 系统的结构形式较为简单, 这为电路实现带来方便。因此, 系统在保密通信等领域具有潜在的应用价值。

在流体系统中, 蒸气和流体在管道中的流动具有延迟; 在通信系统中信号的传输会发生拥挤阻塞等现象; 在种群生态系统中, 捕食者在具有捕食能力之前大都需要一定的成长时间和成熟时间, 因此, 时滞在动力系统中是普遍存在的。基于这样的考虑, Lorenz 类系统(2)中, 给状态变量施加时滞得到一个三维时滞系统, 称之为时滞 Lorenz-like 系统。

在 Lorenz 系统中考虑时滞现象, 构造一个时滞 Lorenz-like 系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t-\tau) + ay(t) \\ \dot{y}(t) = bx(t-\tau) - x(t-\tau)z(t) \\ \dot{z}(t) = -cz(t) + dx^2(t-\tau) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $\tau(>0)$ 为时滞, 可以理解为蒸气或流体在管道中的流动延迟时间、信号传输的阻碍时间, 也可以理解为捕食者的成熟所用的时间(生物生长周期)。

系统(3)具有 3 个平衡点, 它们分别为

$$(0, 0, 0), \left(\frac{\sqrt{bcd}}{d}, \frac{\sqrt{bcd}}{d}, b\right), \left(-\frac{\sqrt{bcd}}{d}, -\frac{\sqrt{bcd}}{d}, b\right)$$

当系统(3)的参数 $a>0, b<0, c>0, d>0$ 时, 系统(1)具有唯一的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 。在此参数条件下, 考虑系统(3)在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处的稳定性以及 Hopf 分岔的存在性。

1 时滞 Lorenz-like 系统在平衡点的稳定性及其 Hopf 分岔

定理 1 如果 $a>0, b<0, c>0, d>0$, 那么,

- (1) 当 $\tau \in [0, \tau_0)$ 时, 系统(1)的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的;
- (2) 当 $\tau > \tau_0$ 时, 系统(1)的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的;
- (3) 当 $\tau = \tau_k$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 时, 系统(1)在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生 Hopf 分岔。

要证此定理, 需要下述关于 Hopf 分岔存在条件的引理。

引理^[3] 假设系统 $\dot{x}=f(x, \mu)$ 在平衡点 $x_0(\mu)$ 处的 Jacobian 矩阵具有一对虚特征根 $\lambda_{1,2} = \alpha(\mu) \pm i\omega(\mu)$ 和实数根 $\lambda_j(\mu)$ 。若对于 $\mu = \mu_0$, 成立下列各式

$$\alpha(\mu_0) = 0, \omega(\mu_0) > 0, \frac{d\alpha(\mu)}{d\mu} \Big|_{\mu=\mu_0} \neq 0, \lambda_j(\mu_0) < 0 (j = 3, 4, \dots, n)$$

则 $\mu = \mu_0$ 为系统的 Hopf 分岔值, 在 $\mu < \mu_0$ (或 $\mu > \mu_0$) 时, 系统将产生一簇围绕平衡点 $x_0(\mu)$ 的极限环。

定理 1 的证明过程分为以下 4 个命题。系统(3)在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处线性化系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -ax(t-\tau) + ay(t) \\ \dot{y}(t) = bx(t-\tau) \\ \dot{z}(t) = -cz(t) \end{cases} \quad (4)$$

线性系统(4)对应的特征方程为

$$(\lambda + c)[\lambda^2 + a(\lambda - b)e^{-\lambda\tau}] = 0 \quad (5)$$

命题 1 若 $\tau=0$, 则系统(3)的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定^[9]的。

证明 当 $\tau=0$ 时, 特征方程(5)转化为

$$\lambda^3 + (a+c)\lambda^2 + a(c-b)\lambda - abc = 0 \quad (6)$$

因为参数 $a>0, b<0, c>0, d>0$, 所以易知 $(a+c)>0, a(c-b)>0, -abc>0$ 。

根据 Routh-Hurwitz 定理^[9]可知,特征方程(4)的所有根都具有负实部。所以当 $\tau=0$ 时,系统(3)的平衡点 $O(0,0,0)$ 是局部渐近稳定的。

证毕。

命题 2 当 $\tau>0$ 时,方程(5)存在一个纯虚根 $\lambda=i\omega$ (ω 为一个正常数)。

证明 由于只考虑虚根,方程(5)与以下方程等价

$$\lambda^2 + a(\lambda - b)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (7)$$

则虚部 ω 满足

$$-\omega^2 + a(i\omega - b)(\cos\omega\tau - i\sin\omega\tau) = 0 \quad (8)$$

于是,

$$\begin{cases} a\omega\sin\omega\tau - ab\cos\omega\tau - \omega^2 = 0 \\ b\sin\omega\tau + \omega\cos\omega\tau = 0 \end{cases} \quad (9)$$

方程(9)可化为

$$\omega^4 - a^2\omega^2 - a^2b^2 = 0 \quad (10)$$

接下来只需证,对于方程(10)至少有一个正实根。令 $u=\omega^2$,则方程(10)可化为

$$u^2 - a^2u - a^2b^2 = 0 \quad (11)$$

设 $g(u) = u^2 - a^2u - a^2b^2$,不妨设 $g(u) = 0$ 的根为 u_1 和 u_2 ,则由韦达定理易知

$$u_1 + u_2 = \frac{a^2}{2}, u_1 \times u_2 = -a^2b^2$$

显然 u_1, u_2 满足 $u_1 \times u_2 < 0$,即 $g(u) = 0$ 必有一正实根,不妨设为 $u' > 0$,此时有 $g(u') = 0$ 从而,显然方程(10)至少有一个正实根。

证毕。

命题 3 存在 $\tau_k \neq 0$,使得方程(5)的特征根 $\lambda(\tau) = \alpha(\tau) + i\omega(\tau)$,满足 $\alpha(\tau_k) = 0, \omega(\tau_k) = \omega_0$ 。

证明 设 ω_0 为方程(10)的一个正实根,则方程(7)有一纯虚根 $i\omega_0$ 。又由方程组(9)得

$$\cos\omega\tau = -\frac{b\omega^2}{a(b^2 + \omega^2)} \quad (12)$$

将 $\omega = \omega_0$ 代入方程(12),则时滞 τ 的值为

$$\tau_k = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(-\frac{b\omega_0^2}{a(b^2 + \omega_0^2)}\right) + \frac{2k\pi}{\omega_0} \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (13)$$

因此 $(i\omega_0, \tau_k)$ 是方程(7)的解,即 $\lambda = \pm i\omega_0$ 是时滞 $\tau = \tau_k$ 时方程(5)的一对共轭的纯虚根。设 $\tau_0 = \min\{\tau_k\}$,则时滞 $\tau = \tau_0$ 是使得方程(5)出现纯虚根 $\lambda = \pm i\omega_0$ 时 τ 的最小值。

证毕

命题 4 对于任意的 $\tau = \tau_k \neq 0$,则 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau)}{d\tau} \Big|_{\tau=\tau_k} > 0$ 。

证明 在方程(7)两边同时对 τ 求导,得

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda}{d\tau} &= \frac{a\lambda(\lambda - b)e^{-\lambda\tau}}{2\lambda + ae^{-\lambda\tau} - a\tau(\lambda - b)e^{-\lambda\tau}} = \\ &= \frac{\lambda^2(\lambda - b)}{\tau\lambda^2 + (1 - b\tau)\lambda - 2b} \end{aligned}$$

易得,

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1} = -\frac{\tau\lambda^2 + (1 - b\tau)\lambda - 2b}{\lambda^2(\lambda - b)}$$

因为 $\lambda(\tau_k) = i\omega_0$,所以有

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_k}\right] &= \left[-\frac{\tau}{\omega_0 i - b} - \frac{(1 - b\tau)}{\omega_0 i(\omega_0 i - b)} - \frac{2b}{\omega_0^2(\omega_0 i - b)}\right] = \\ &= \left[\frac{\tau}{b - \omega_0 i}\right] + \left[\frac{(1 - b\tau)}{\omega_0(\omega_0 + bi)}\right] + \left[\frac{2b}{\omega_0^2(b - \omega_0 i)}\right] = \\ &= \frac{b\tau}{\omega_0^2 + b^2} + \frac{1 - b\tau}{(\omega_0^2 + b^2)} + \frac{2b^2}{\omega_0^2(\omega_0^2 + b^2)} = \\ &= \frac{\omega_0^2 + 2b^2}{\omega_0^2(\omega_0^2 + b^2)} > 0 \end{aligned}$$

即

$$\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_k} = \operatorname{Re}\left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_k}\right] > 0$$

又因 $\operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_k}\right)\right\} = \operatorname{sign}\left\{\operatorname{Re}\left[\left(\frac{d\lambda}{d\tau}\right)^{-1}\Big|_{\tau=\tau_k}\right]\right\}$, 故 $\tau=\tau_k \neq 0$ 时 $\frac{d\operatorname{Re}\lambda(\tau)}{d\tau}\Big|_{\tau=\tau_k} > 0$ 成立。

证毕。

综上所述,根据引理,定理 1 成立。

2 数值仿真

因为参数 $a>0, b<0, c>0, d>0$, 不妨取 $a=c=d=1, b=-1$, 这时系统为

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -x(t-\tau) + y(t) \\ \dot{y}(t) = -x(t-\tau) - x(t-\tau)z(t) \\ \dot{z}(t) = -z(t) + x^2(t-\tau) \end{cases}$$

利用 Matlab 软件计算得,由 $\omega^4 - a^2\omega^2 - a^2b^2 = 0$, 得 $\omega_0 = 1.272$; 再由 $\tau_0 = \frac{1}{\omega_0} \arccos\left(-\frac{b\omega_0^2}{a(b^2 + \omega_0^2)}\right)$, 得 $\tau_0 =$

0.711 1。因此,由定理 1 可得下面的推论。

推论若 $a>0, b<0, c>0, d>0$, 则

(1) 当 $\tau \in [0, 0.711 1)$ 时, 系统的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的;

(2) 当 $\tau > 0.711 1$ 时, 系统的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的;

(3) $\tau = 0.711 1 + 1.572 3k\pi$ ($k=0, 1, 2, 3, \dots$) 是系统的 Hopf 分岔值, 即系统(2)在平衡点 $O(0, 0, 0)$

处发生 Hopf 分岔, 产生极限环。

利用 Matlab 软件, 给出时滞 τ 取不同值时的系统的状态变量随时间 t 的轨线图和相图。由图 1 可以看出, 当时滞 $\tau=0.7$ 时, 系统的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 的逐渐增大而趋于平衡点 $O(0, 0, 0)$, 所以平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是渐近稳定的。由图 2 知, 当时滞 $\tau=0.711 1$ 时, 系统的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 的增大永远保持周期震荡, 说明系统在平衡点 $O(0, 0, 0)$ 处发生了 Hopf 分岔, 在相空间 $O-xyz$ 上出现了极限环。

由图 3 可以看出, 系统的状态变量 x, y, z 的值随时间 t 增大而逐渐远离平衡点, 所以当时滞 $\tau=0.72$ 时, 系统的平衡点 $O(0, 0, 0)$ 是不稳定的。

3 总 结

研究了时滞 Lorenz-like 系统在平衡点处的稳定性与 Hopf 分岔。通过理论分析, 给出了时滞 Lorenz-like 系统在平衡点处渐进稳定的条件, 以及发生 Hopf 分岔的条件。数值模拟验证了理论分析的正确性。通过对

时滞 Lorenz-like 系统的稳定性与 Hopf 分岔分析,说明该时滞系统具有较丰富的动力学状态,为系统在实际中应用提供理论基础。

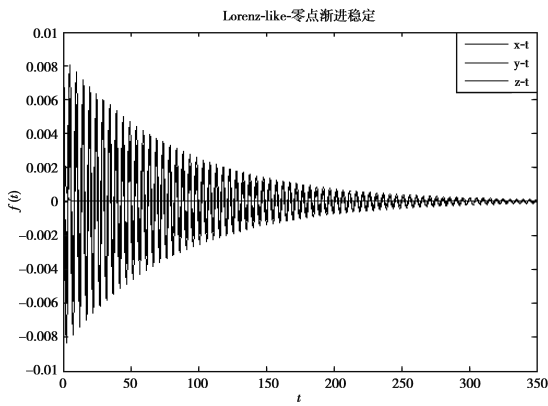


图 1 $\tau=0.7, x(t)=0.01, y(t)=0.02, z(t)=0.01$
($t \in [-0.7, 0]$) 时, x, y, z 随 t 的轨线

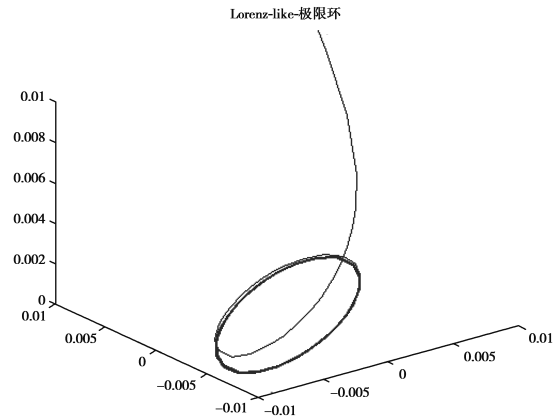


图 2 当 $\tau=0.7111, x(t)=y(t)=z(t)=0.01$
($t \in [-0.3, 0]$) 时, 系统的相图

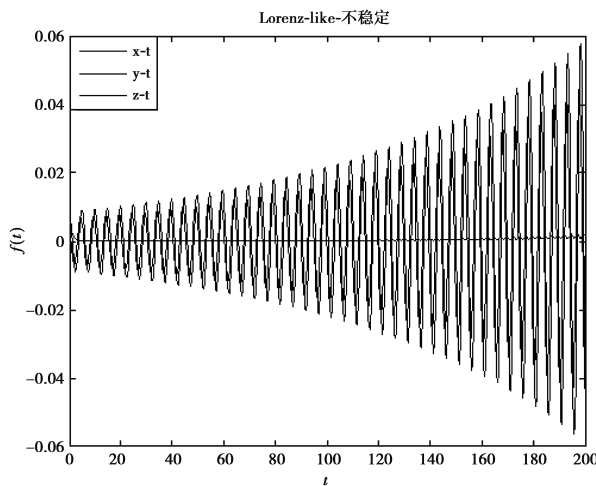


图 3 当 $\tau=0.72, x(t)=y(t)=z(t)=0.01$
($t \in [-0.72, 0]$) 时, x, y, z 随时间 t 的轨线

参考文献:

[1] TAN C W, VARGHESE N, VARAIYA P. Bifurcation chaos and voltage collapse in power systems [J]. Proceedings of the IEEE, 1995, 83: 1484-1496

[2] 王庆红, 周双喜. 电力系统奇异摄动模型霍普夫分岔分析 [J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(8): 1-6

[3] HASSARD B, KAZARINOFF N, WAN Y. Theory and Application of Hopf Bifurcation [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1982

[4] ROSSLER Q E. An equation for continuous chaos [J]. Phys Lett A, 1976, 57: 397-398

[5] CHEN G, UETA T. Yet another chaotic attractor [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 1999(9): 1465-1466

[6] LIU C, LIU T, LIU L. A new chaotic attractor [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 22: 1031-1038

[7] TIGAN G. Analysis of a 3D chaotic system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 36: 1315-1319

[8] MELLO L F, MESSIAS M, BRAGA D C. Bifurcation analysis of a new Lorenz-like chaotic system [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2008, 37: 1244-1255

[9] 马知恩, 周义仓. 常微分方程稳定性与稳定性方法 [M]. 北京: 科学出版社, 2005

Research on Hopf Bifurcation of Lorenz-like Delay System

WANG Zhi-qiang, WANG Shu-ling, WU Ran-chao

(School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China)

Abstract: With the development of power system, the stability of the equilibrium point and Hopf bifurcation are more and more important to the research on power system. This paper at first studies the condition for the equilibrium point existence in Lorenz-like delay system. Under this condition, the stability of the system at the equilibrium point is obtained by the analysis of the characteristic root distribution of the linearized system at the equilibrium point of the system. With the changing of delay parameters of the system, the stability of the delay system at the equilibrium point can change corresponding, and the condition for the existence of Hopf bifurcation of this delay system is studied by taking delay as bifurcation parameter. Finally the simulation by Matlab program tests the validity of the theoretical analysis.

Key words: Lorenz-like delay system; stability; limit cycle; Hopf bifurcation

责任编辑:田 静

~~~~~  
(上接第 10 页)

## Research on the Relationship between Individual Feature and College Students Consumption level ——Based on Probit Model and ANOVA Model

**XIANG Shu-chang<sup>1</sup>, WANG Ya-jing<sup>2</sup>, ZU Xuan<sup>1</sup>, MAO Jun-jun<sup>1,3</sup>**

(1. School of Mathematical Science, Anhui University, Hefei 230601, China; 2. School of Business, Anhui University, Hefei 230601, China; 3. Key Laboratory of Computation Intelligent and Signal Processing of Education Ministry of China, Anhui University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** Based on 512 questionnaires of college students in Anhui University, this paper firstly analyzes the influence of individual feature on college students consumption level by ordered Probit Regression Model, then analyzes the impact of different levels of individual feature on consumption expenditure by variance analysis method, and the results show that college students consumption level is significantly affected by the grade, family location, family income situation and financing ideas of college students but it is not obviously affected by gender, major and the number of siblings, and the family income has decisive impact on college students consumption.

**Key words:** college students; individual feature; consumption level; Probit Model; ANOVA

责任编辑:田 静